TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Tommi Karila

Lyhdekohomologia

Luonnontieteiden tiedekunta
Matematiikka
Syyskuu 2018

Tampereen yliopisto
Luonnontieteiden tiedekunta
KARILA, TOMMI: Lyhdekohomologia
Pro gradu -tutkielma, 64 s.
Matematiikka
Syyskuu 2018

Tiivistelmä

Tämän tutkielman tarkoituksena on perehtyä lyhdekohomologiaan, joka on hyödyllinen työkalu esimerkiksi kompleksianalyysin tutkimuksessa. Tutkielman aluksi määritellään esilyhteisiin ja lyhteisiin liittyvät peruskäsitteet sekä näiden väliset homomorfismit. Tämän jälkeen määritellään esilyhteeseen liittyvä lyhde, jonka avulla kaikki esilyhteet voidaan muuntaa lyhteiksi. Tätä määritelmää käytetään hyväksi lyhdehomomorfismien kuvien määrittelyssä.

Lyhteiden perusteiden määrittelyn jälkeen siirrytään tarkastelemaan lyhteiden eksakteja jonoja. Määritelmän jälkeen huomataan, että lyhteiden eksakti jono ei välttämättä toteuta kaikkia siltä haluttuja ominaisuuksia, mikä toimii motivaationa lyhdekohomologian määrittelemiselle ja tutkimiselle. Tämän havainnon pohjalta lähdetään tarkastelemaan yleisempää muotoa esilyhteeseen liittyvästä lyhteestä ja nimetään näin saatu lyhde Godementin lyhteeksi. Tämän jälkeen määritellään lyhteen resoluutio ja osoitetaan, että Godementin lyhteet muodostavat resoluution mielivaltaiselle lyhteelle.

Seuraavaksi otetaan käyttöön käsite veltto lyhde, ja todistetaan, että velttojen lyhteiden eksakteja jonoja tutkiessa aiemmin kohdattu ongelma poistuu. Todistetaan myös, että Godementin lyhde on veltto ja määritellään lyhteen veltto resoluutio. Sitten todetaan, että aiemmin muodostettu jono lyhteen Godementin resoluutioita muodostaa lyhteen velton resoluution, joka tunnetaan nimellä Godementin resoluutio. Tämän jälkeen määritellään lyhteelle kohomologia ja todistetaan, että Godementin resoluutio tuottaa pitkän eksaktin kohomologiaryhmien jonon lyhyelle eksaktille jonolle lyhteitä. Lopuksi todistetaan, että kohomologiaryhmät eivät riipu velton resoluution valinnasta isomorfismeja lukuun ottamatta.

Sisältö

1 Johdanto

Tämän tutkielman tarkoitus on määritellä lyhdekohomologia ja muutamia tähän liittyviä hyödyllisiä tuloksia. Lyhdekohomologia on tärkeä ja hyödyllinen työkalu kompleksialgebrassa. Tutkielmassa erityisenä mielenkiinnon kohteena ovat Godementin lyhteet ja näiden määrittämä lyhteen Godementin resoluutio, sekä tämän resoluution määrittämä lyhdekohomologia.

Luvussa 2 määritellään käsitteet esilyhde ja lyhde. Lisäksi määritellään suora raja ja todistetaan suoran rajan universaaliominaisuus. Tämän jälkeen esilyhteen ja lyhteen oljet määritellään suoraksi rajaksi sen topologisen avaruuden avoimien joukkojen ylitse, jonka esilyhteitä tai lyhteitä kyseiset rakenteet ovat. Myöhemmin huomataan, että oljet osoittautuvat todella hyödylliseksi välineeksi lyhdehomomorfismien tutkimiseen.

Luvussa 3 määritellään esilyhteen ja lyhteen morfismit sekä määritellään esilyhteeseen liittyvä lyhde, jolloin jokaiseen esilyhteeseen saadaan liitettyä lyhde, jonka olkien huomataan yhtenevän esilyhteen olkiin. Tämän jälkeen määritellään mitä ovat lyhdehomomorfismin ydin ja kuva, sekä lyhteen alilyhde. Luvun lopuksi näille todistetaan muutamia käsittelyä helpottavia ominaisuuksia.

Lyhdehomomorfismin määrittelyn jälkeen luvussa 4 määritellään, mitä tarkoittaa lyhteiden eksakti jono ja todistetaan tähän liittyviä hyödyllisiä tuloksia. Tämän jälkeen määritellään Godementin lyhde ja todistetaan kyseisen lyhteen antamille kaavioille viimeisessä luvussa käytettäviä lauseita. Lopulta luvussa määritellään lyhteen resoluutio.

Edellisessä luvussa huomattiin, että lyhde ei itsessään takaa sen antamien Abelin ryhmien jonojen eksaktiutta, joten luvussa 5 määritellään käsite veltto lyhde ja todistetaan tähän liittyviä tuloksia. Tämän jälkeen määritellään lyhteen veltto resoluutio. Velton resoluution määräämän Abelin ryhmien jonon eksaktiuden tutkimiseksi määritellään lyhteen kohomologiaryhmät, ja todistetaan, että eksaktin lyhyen lyhdejonon lyhteiden Godementin resoluutioiden määräämä kaavio tuottaa näiden lyhteiden kohomologiaryhmille eksaktin jonon. Viimeiseksi todistetaan, että lyhteen velton resoluution valinta ei vaikuta lyhteen kohomologiaryhmiin.

Lukijalta edellytetään topologian, algebran ja kompleksianalyysin perusteiden tuntemista. Tutkielman päälähteenä toimii Kenji Uenon teos Algebraic Geometry 2, Sheaves and Cohomology [6].

2 Esilyhteet ja lyhteet

2.1 Esilyhteet ja lyhteet

Määritelmä 2.1 (ks. [4, s. 61])**.** Olkoon X topologinen avaruus. Sanotaan, että $\mathcal{F}$ on avaruuden X Abelin ryhmien *esilyhde*, mikäli seuraavat ehdot ovat voimassa:

(a) Jokaista avaruuden X avointa joukkoa $U \subseteq X$ vastaa Abelin ryhmä $\mathcal{F}(U)$.

(b) Kaikilla avoimilla joukoilla $U, V \subseteq X$, joille pätee $V \subseteq U$, on olemassa ryhmähomomorfismi $\rho_{UV} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$.

Lisäksi seuraavien ehtojen tulee päteä:

(0) Ryhmä $\mathcal{F}(\emptyset)$ on nollaryhmä.

(1) Homomorfismi $\rho_{UU} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$ on identiteettikuvaus kaikilla avoimilla $U \subseteq X$.

(2) Jos joukot $U, V, W \subseteq X$ ovat avoimia ja $W \subseteq V \subseteq U$, niin $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

Ehdossa (b) esitettyjä kuvauksia ρ kutsutaan esilyhteen $\mathcal{F}$ *rajoittumakuvauksiksi.*

Määritelmä 2.2 (ks. [4, s. 61])**.** Sanotaan, että esilyhde $\mathcal{F}$ on *lyhde*, mikäli seuraavat lisäehdot pätevät:

(3) Olkoot $U \subseteq X$ avoin joukko, $\{V_i\}_{i \in I}$ joukon U avoin peite ja $s \in \mathcal{F}(U)$. Jos $\rho_{UV_i}(s) = 0_{V_i}$ kaikilla $i \in I$, niin $s = 0_U$, missä 0_V on ryhmän $\mathcal{F}(V)$ neutraalialkio kaikilla avoimilla $V \subseteq X$.

(4) Olkoot $U \subseteq X$ avoin joukko, $\{V_i\}_{i \in I}$ joukon U avoin peite ja $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ kaikilla $i \in I$. Merkitään $V_{ij} = V_i \cap V_j$ kaikilla $i, j \in I$. Jos kaikilla $j, k \in I$ pätee, että $\rho_{V_j V_{jk}}(s_j) = \rho_{V_k V_{kj}}(s_k)$, niin on olemassa sektio $s \in \mathcal{F}(U)$ siten, että $\rho_{UV_i}(s) = s_i$ kaikilla $i \in I$.

Huomautus (vrt. [4, s. 61])**.** Olkoon $\mathcal{F}$ lyhde ja $U \subseteq X$ avoin joukko. Edellisen määritelmän kohdassa (4) määritelty $s \in \mathcal{F}(U)$ on yksikäsitteinen.

Todistus. Olkoot $\{V_i\}_{i \in I}$ sektiota s vastaava joukon U avoin peite ja $s' \in \mathcal{F}(U)$ siten, että $\rho_{UV_i}(s) = \rho_{UV_i}(s')$ kaikilla $i \in I$. Täten jokaisella $i \in I$ pätee

$$\rho_{UV_i}(s - s') = \rho_{UV_i}(s) - \rho_{UV_i}(s') = 0,$$

joten lyhteen ominaisuuden (3) perusteella $s = s'$. $\square$

2.2 Esimerkkejä

Esimerkki 2.1. Olkoon X topologinen avaruus. Sellainen topologisen avaruuden X lyhde $\mathcal{F}$, jolla kaikilla avoimilla $U \subseteq X$ ryhmä $\mathcal{F}(U)$ on nollaryhmä ja jonka rajoittumakuvaukset ovat nollahomomorfismeja, tunnetaan nimellä nollalyhde ja merkitään $\mathcal{F} = 0$.

Esimerkki 2.2. Olkoot X topologinen avaruus, $x \in X$ ja A Abelin ryhmä. Määritellään $\mathcal{F}$ siten, että

$$\mathcal{F}(U) = \begin{cases} A & \text{, jos } x \in U \\ \text{nollaryhmä} & \text{, jos } x \notin U. \end{cases}$$

Tällöin $\mathcal{F}$ on lyhde, kun sen rajoittumakuvauksille pätee:
Olkoon $U, V \subseteq X$ avoimia siten, että $V \subseteq U$. Jos $x \in U$ ja $x \in V$, niin $\rho_{UV} = id_A$. Jos taas $x \notin U$ tai $x \notin V$, niin ρ_{UV} on nollahomomorfismi.
Näin määritelty lyhde $\mathcal{F}$ tunnetaan nimellä pilvenpiirtäjälyhde.

Todistus. Nyt $\mathcal{F}(U)$ on Abelin ryhmä kaikilla avoimilla $U \subseteq X$ ja $\mathcal{F}(\emptyset)$ on nollaryhmä. Lisäksi määritellyt rajoittumakuvaukset toteuttavat esilyhteen ehdot. Olkoon $U \subseteq X$ avoin. Jos $x \notin U$, niin $\mathcal{F}(U)$ on nollaryhmä, ja vastaavasti $\mathcal{F}(V)$ on nollaryhmä kaikilla avoimilla $V \subseteq U$, jolloin lyhteen ehdot (3) ja (4) toteutuvat. Oletetaan sitten, että $x \in U$. Olkoon $\{V_i\}_{i \in I}$ joukon U avoin peite. Tällöin jollakin $i \in I$ pätee $x \in V_i$ ja $\mathcal{F}(V_i) = A$ sekä ρ_{UV_i} on identiteettikuvaus $A \to A$. Täten lyhteen ehdot (3) ja (4) toteutuvat selvästi. □

Esimerkki 2.3. Olkoot X topologinen avaruus ja A Abelin ryhmä. Jos A varustetaan mielivaltaisella topologialla ja määritellään $\mathcal{A}$ siten, että $\mathcal{A}(U)$ on kaikkien jatkuvien kuvausten $U \to A$ joukko kaikilla avoimilla $U \subseteq X$. Tällöin $\mathcal{A}$ on lyhde, kun halutut rajoittumakuvaukset ovat perinteisiä rajoittumakuvauksia.

Todistus. Olkoot $U \subseteq X$ avoin ja $\mathcal{A}(U)$ kaikkien jatkuvien kuvausten joukko joukolta U joukolle A.

(a) Nyt A on Abelin ryhmä, jolloin kuvauksille joukolta U joukolle A on mielekästä määrittää yhteenlasku. Tiedetään lisäksi, että kahden jatkuvan kuvaksen summa on jatkuva kuvaus $U \to A$, joten sekin kuuluu joukkoon $\mathcal{A}(U)$. Lisäksi tämä laskutoimitus on liitännäinen ja vaihdannainen, ja sen nolla-alkio on vakiokuvaus ryhmän A nolla-alkiolle. Siis $\mathcal{A}(U)$ on Abelin ryhmä.

(b) Olkoot $V \subseteq X$ avoin siten, että $V \subseteq U$ ja $f \in \mathcal{A}(U)$. Tällöin $f_{|V}$ on rajoittumakuvauksena jatkuva, ja se on kuvaus $V \to A$, joten $f_{|V} \in \mathcal{A}(V)$. Halutuksi rajoittumakuvaukseksi voidaan siis määritellä kuvaus, joka kuvaa joukon $\mathcal{A}(U)$ kuvaukset rajoittumilleen.

(0) Ainoa kuvaus $\emptyset \to A$ on tyhjä kuvaus, joten $\mathcal{A}(\emptyset)$ on nollaryhmä.

(1) Olkoon $f \in \mathcal{A}(U)$. Aiemmin määriteltiin, että ρ_{UU} kuvaa kuvauksen f rajoittumakuvaukselleen $f_{|U}$, mutta $f_{|U} = f$. Siis ρ_{UU} on identiteettikuvaus.

(2) Olkoot $V, W \subseteq X$ avoimia siten, että $W \subseteq V \subseteq U$ ja $f \in \mathcal{A}(U)$. Tällöin $\rho_{UW}(f) = f_{|W}$. Toisaalta

$$(\rho_{VW} \circ \rho_{UV})(f) = \rho_{VW}(\rho_{UV}(f)) = \rho_{VW}(f_{|V}) = f_{|W},$$

joten $\rho_{UW}(f) = (\rho_{VW} \circ \rho_{UV})(f)$. Siis $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

(3) Olkoot $U \subseteq X$ avoin joukko, $\{V_i\}_{i \in I}$ joukon U avoin peite ja $f \in \mathcal{A}(U)$ siten, että $\rho_{UV_i}(f) = 0_{V_i}$, missä 0_{V_i} on ryhmän $\mathcal{A}(V_i)$ neutraalialkio kaikilla $i \in I$. Olkoon $x \in U$. Tällöin on olemassa $j \in I$ siten, että $x \in V_j$. Täten

$$f(x) = (\rho_{UV_j}(f))(x) = 0_{V_j}(x) = 0,$$

joten $f(x) = 0 = 0_U(x)$ kaikilla $x \in U$. Siis $f = 0_U$.

(4) Olkoot $U \subseteq X$ avoin joukko, $\{V_i\}_{i \in I}$ joukon U avoin peite ja $f_i \in \mathcal{A}(V_i)$ kaikilla $i \in I$ siten, että kaikilla $j, k \in I$ pätee

$$\rho_{V_j V_{jk}}(f_j) = \rho_{V_k V_{kj}}(f_k),$$

missä $V_{jk} = V_j \cap V_k$. Määritellään kuvaus $f \colon U \to A$ siten, että $f(x) = f_i(x)$, kun $x \in V_i$ ja $i \in I$. Nyt kaikilla $x \in U$ on olemassa $V_i \subseteq X$, $i \in I$, siten, että $x \in V_i$, sillä $\{V_i\}_{i \in I}$ on joukon U avoin peite, joten $f(x)$ on olemassa. Olkoon $x \in U$ siten, että $x \in V_{ij}$. Nyt kuvauksen f määritelmän mukaan $f(x) = f_i(x)$ ja $f(x) = f_j(x)$, mutta oletuksen mukaan

$$\rho_{V_i V_{ij}}(f_i) = f_{i_{|V_{ij}}} = f_{j_{|V_{ij}}} = \rho_{V_j V_{ij}}(f_j).$$

Koska $x \in V_{ij}$, niin $f_i(x) = f_j(x)$, jolloin f on kuvaus. Todistetaan sitten, että f on jatkuva. Olkoon $W \subseteq A$ avoin. Voidaan olettaa, että on olemassa $x \in f^{-1}(W)$, sillä jos näin ei ole, niin $f^{-1}(W) = \emptyset$ on avoin. Täten on olemassa V_i, $i \in I$, siten, että $x \in V_i$. Tällöin $x \in f_i^{-1}(W)$ ja $f_i^{-1}(W)$ on avoin, sillä f_i on jatkuva. Siis pisteellä x on olemassa avoin ympäristö $V_{ix} \subseteq V_i$. Nyt $U \cap V_{ix}$ on avoin, $x \in U \cap V_{ix}$ ja

$$f(V_{ix} \cap U) = f_i(V_{ix} \cap U) \subseteq W.$$

Tällöin

$$V_x = \bigcup_{x \in V_j, j \in I} V_{jx} \cap U$$

on pisteen x avoin ympäristö siten, että $V_x \subseteq f^{-1}(W)$. Täten kun x käy läpi kaikki joukon $f^{-1}(W)$ pisteet, saadaan

$$f^{-1}(W) = \bigcup_{x \in f^{-1}(W)} V_x,$$

missä V_x on avoin kaikilla $x \in f^{-1}(W)$. Siis $f^{-1}(W)$ on avointen joukkojen mielivaltaisena yhdisteenä avoin, jolloin f on jatkuva. Olkoon $i \in I$. Määritelmän mukaan $\rho_{UV_i}(f) = f_{|V_i}$, jolloin kaikilla $x \in V_i$

$$f_{|V_i}(x) = f(x) = f_i(x),$$

joten $\rho_{UV_i}(f) = f_i$ kaikilla $i \in I$.

$\square$

Esimerkki 2.4. Olkoot X topologinen avaruus ja A Abelin ryhmä. Varustetaan A diskreetillä topologialla. Määritellään $\mathcal{A}$ seuraavasti:
Olkoon $U \subseteq X$ avoin. Tällöin $\mathcal{A}(U)$ on kaikkien jatkuvien kuvausten joukko joukolta U joukolle A. Sanotaan, että $\mathcal{A}$ on *vakiolyhde*. Edellisen esimerkin perusteella $\mathcal{A}$ on lyhde ja kaikilla avoimilla ja yhtenäisillä $U \subseteq X$ joukko $\mathcal{A}(U)$ on isomorfinen ryhmän A kanssa.

Todistus. Olkoon $U \subseteq X$ avoin ja yhtenäinen. Todistetaan, että kaikilla $f \in \mathcal{A}(U)$ kuvaus f on vakiokuvaus. Oletetaan vastoin väitettä, että on olemassa $a, b \in A$ siten, että $a \neq b$ ja $a, b \in \text{im}(f)$. Tällöin, koska f on jatkuva, niin $f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$ ja $f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset$ ovat avoimia, ja koska f on kuvaus, niin $f^{-1}(\{a\}) \cap f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$. Tämä on ristiriita, sillä U on yhtenäinen. Siis jokainen kuvaus $f \in \mathcal{A}(U)$ on vakiokuvaus, joten $\mathcal{A}(U)$ on isomorfinen ryhmän A kanssa kaikilla avoimilla ja yhteinäisillä $U \subseteq X$. $\square$

Esimerkki 2.5. Varustetaan kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$ tavanomaisella topologiallaan. Määritellään $2\pi i\mathbb{Z}$, $\mathcal{O}$ ja $\mathcal{O}^*$ siten, että kaikilla avoimilla $U \subseteq X$.

a) $2\pi i\mathbb{Z}(U)$ on kaikkien lokaalisti vakioiden kuvausten $U \to \mathbb{C}$ joukko siten, että $f(z) = 2\pi i n$, missä $n \in \mathbb{Z}$, kaikilla $f \in 2\pi i\mathbb{Z}(U)$ ja $z \in U$.

b) $\mathcal{O}(U)$ on kaikkien holomorfisten kuvausten $U \to \mathbb{C}$ joukko.

c) $\mathcal{O}^*(U)$ on kaikkien ei-häviävien holomorfisten kuvausten $U \to \mathbb{C}$ joukko.

Tällöin $2\pi i\mathbb{Z}$, $\mathcal{O}$ ja $\mathcal{O}^*$ ovat lyhteitä, kun ne varustetaan perinteisillä rajoittumakuvauksilla.

Todistus. Olkoon $U \subseteq \mathbb{C}$ avoin.

a) Lokaalisti vakiot kuvaukset ovat jatkuvia ja lisäksi niiden summat antavat arvoja $2\pi i n$, $n \in \mathbb{Z}$, joten $2\pi i\mathbb{Z}$ on Abelin ryhmä aliryhmänä. Lisäksi lokaalisti vakioiden kuvausten ryhmä toteuttaa ehdot (0)–(3) vastaavasti kuin esimerkissä 2.3. Ehdon (4) kuvaus saadaan kuten edellä mainitussa esimerkissä, sekä sen arvot ovat muotoa $2\pi i n$.

b) Tiedetään, että holomorfiset kuvaukset ovat jatkuvia ja niiden summa on holomorfinen, joten $\mathcal{O}(U)$ on Abelin ryhmä aliryhmänä. Lisäksi joukossa U holomorfiset kuvaukset toteuttavat ehdot (0)–(3) vastaavasti kuin esimerkissä 2.3. Olkoon lopuksi $\{V_i\}_{i\in I}$ joukon U avoin peite, jolle pätee ehdon (4) oletukset. Haluttu kuvaus saadaan määriteltyä vastaavasti kuin edeltävässä esimerkissä. Osoitetaan vielä, että täten määritelty kuvaus on holomorfinen kaikilla $z \in U$. Olkoon $z \in U$. Tällöin on olemassa $i \in I$ siten, että $z \in V_i$ jolloin $f(w) = f_i(w)$ kaikilla $w \in V_i$. Erityisesti, koska f_i on holomorfinen, on olemassa avoin kiekko $B(z, r) \subseteq V_i$ siten, että f on kompleksisesti derivoituva kaikilla $w \in B(P, r)$. Koska $B(z, r) \subseteq V_i \subseteq U$, niin f on holomorfinen pisteessä z.

c) Ei-häviävien holomorfisten kuvausten ryhmän laskutoimituksena toimii kertolasku ja nolla-alkiona vakiokuvaus

$$f\colon U \to \mathbb{Z}, f(x) = 1.$$

Tiedetään, että tällöin $\mathcal{O}^*$ on Abelin ryhmä ja vastaavasti kuin edellä $\mathcal{O}^*$ toteuttaa ehdot (0)–(3) ja ehdon (4) kuvaus saadaan konstruoitua vastaavasti. Tämä kuvaus on holomorfinen edellisen kohdan perusteella. Lisäksi, koska kuvaukset f_i ovat ei-häviäviä kaikilla $i \in I$, kun $\{V_i\}_{i\in I}$ on joukon U avoin peite, niin myös näille konstruoitu kuvaus f on ei-häviävä.

$\square$

2.3 Suora raja

Määritelmä 2.3 (vrt. [3, s. 4])**.** Olkoon I joukko. Sanotaan, että I on *suunnattu*, mikäli I on varustettu refleksiivisellä ja transitiivisella relaatiolla $\geq$ siten, että jokaisella $i, j \in I$ on olemassa $k \in I$ siten, että $k \geq i$ ja $k \geq j$.

Olkoot I suunnattu joukko, $\{A_i\}_{i\in I}$ Abelin ryhmiä ja $\rho_{ij}\colon A_i \to A_j$ homomorfismi kaikilla $i, j \in I$ siten, että $j \geq i$, jolle pätee:

- $\rho_{ii} = id_{A_i}$
- Kaikilla $i, j, k \in I$, joille pätee $k \geq j \geq i$, pätee $\rho_{ik} = \rho_{jk} \circ \rho_{ij}$.

Määritellään ryhmien A_i *erillinen yhdiste* seuraavasti:

$$\coprod_{i\in I} A_i := \bigcup_{i\in I} A_i \times \{i\}.$$

Määritellään tälle joukolle relaatio $\sim$ siten, että kaikilla $i, j \in I$, $x \in A_i$ ja $y \in A_j$ pätee $(x, i) \sim (y, j)$, jos ja vain jos on olemassa $k \in I$ siten, että $k \geq i$, $k \geq j$ ja $\rho_{ik}(x) = \rho_{jk}(y)$. Osoitetaan, että tämä relaatio on ekvivalenssirelaatio.

- Olkoon $(x, i) \in \coprod_{i\in I} A_i$. Nyt $\rho_{ii}(x) = \rho_{ii}(x)$ ja $i \geq i$, joten $(x, i) \sim (x, i)$. Täten $\sim$ on refleksiivinen.

- Olkoot $(x,i),(y,j) \in \coprod_{i\in I} A_i$ siten, että $(x,i) \sim (y,j)$. Nyt on olemassa $k \in I$ siten, että $k \geq i$ ja $k \geq j$ ja $\rho_{ik}(x) = \rho_{jk}(y)$. Täten $\rho_{jk}(y) = \rho_{ik}(x)$, joten $(y,j) \sim (x,i)$. Siis $\sim$ on symmetrinen.

- Olkoot $(x,i),(y,j),(z,k) \in \coprod_{i\in I} A_i$ siten, että $(x,i) \sim (y,j)$ ja $(y,j) \sim (z,k)$. Nyt on olemassa $m_1, m_2 \in I$ siten, että $m_1 \geq i$, $m_1 \geq j$, $m_2 \geq j$ ja $m_2 \geq k$, joille pätee $\rho_{im_1}(x) = \rho_{jm_1}(y)$ ja $\rho_{jm_2}(y) = \rho_{km_2}(z)$. Nyt I on suunnattu, joten on olemassa $m \in I$ siten, että $m \geq m_1$ ja $m \geq m_2$. Täten

$$\begin{aligned}\rho_{im}(x) &= \rho_{m_1m}(\rho_{im_1}(x)) \\ &= \rho_{m_1m}(\rho_{jm_1}(y)) \\ &= \rho_{jm}(y) \\ &= \rho_{m_2m}(\rho_{jm_2}(y)) \\ &= \rho_{m_2m}(\rho_{km_2}(z)) \\ &= \rho_{km}(z),\end{aligned}$$

  missä $m \geq i$ ja $m \geq k$, sillä I on transitiivinen, joten $(x,i) \sim (z,k)$. On siis osoitettu, että $\sim$ on transitiivinen.

Määritelmä 2.4 (vrt. [3, s. 4])**.** Määritellään *suora raja*

$$\varinjlim A_i := \left(\coprod_{i\in I} A_i\right) / \sim,$$

missä $\sim$ on edellä määritelty erillisen yhdisteen $\coprod_{i\in I} A_i$ ekvivalenssirelaatio.

Lause 2.1. *Olkoon $A = \varinjlim A_i$ edeltävällä tavalla määritelty suora raja. Tällöin A on Abelin ryhmä.*

Todistus (vrt. [3, s. 4]). Määritellään suoran rajan A laskutoimitus seuraavasti:

$$[x,i] + [y,j] = [\rho_{ik}(x) \oplus \rho_{jk}(y), k],$$

missä $i,j,k \in I$, $x \in A_i$, $y \in A_j$, $k \geq i$, $k \geq j$ ja $\oplus$ on Abelin ryhmän A_k laskutoimitus. Kyseinen k on olemassa, sillä I on suunnattu. Huomataan sitten, että

$$[z,i] = [\rho_{ik}(z), k]$$

kaikilla $z \in A_i$. Vastaavasti $[z',j] = [\rho_{jk}(z'), k]$ kaikilla $z' \in A_j$ ja $k \geq i$, joten kyseinen määritelmä on mielekäs. Nyt ρ_{ij} on homomorfismi kaikilla $i,j \in I$, joten suoran rajan A nolla-alkio on

$$[0,i] = [0,j] = [0,k],$$

missä $i,j,k \in I$, $k \geq i$ ja $k \geq j$. Lisäksi kaikilla alkioilla $[x,i] \in A$ on vasta-alkio $[-x,i] \in A$, missä $x \in A_i$, $i \in I$ ja $-x$ on alkion x vasta-alkio ryhmässä A_i. Lopulta, koska $\oplus$ on Abelin ryhmän laskutoimitus, niin $+$ on vaihdannainen ja liitännäinen. $\square$

Huomautus. Olkoot I suunnattu joukko, $\{A_i\}_{i\in I}$ Abelin ryhmiä ja $\rho_{ij}\colon A_i \to A_j$ homomorfismeja kaikilla $i,j\in I$, jotka toteuttavat edeltävät ehdot. Tällöin kaikilla $i\in I$ on olemassa homomofismi

$$\varphi_i\colon A_i \to \varinjlim A_i$$

siten, että $\varphi_i(x)=[x,i]$, kaikilla $x\in A_i$.

Lause 2.2 (Universaaliominaisuus)**.** *Olkoot I suunnattu joukko, $\{A_i\}_{i\in I}$ Abelin ryhmiä, joille on olemassa homomorfismit $\rho_{ij}\colon A_i\to A_j$ kaikilla $i,j,\in I$ siten, että $j\geq i$, joille pätee edeltävät ehdot. Olkoot $A=\varinjlim A_i$, B Abelin ryhmä ja $\psi_i\colon A_i\to B$ homomorfismeja siten, että*

$$\psi_i=\psi_j\circ\rho_{ij}$$

kaikilla $i,j\in I$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen homomorfismi $f\colon A\to B$ siten, että

$$f\circ\varphi_i=\psi_i,$$

missä φ_i on edeltävän huomatuksen mukainen homomorfismi, kaikilla $i\in I$.

Todistus (vrt. [5, s. 4]). Olkoon $[a,i]\in A$. Määritellään f siten, että

$$f([a,i])=\psi_i(a).$$

Olkoot $i,j\in I$, $a_i\in A_i$ ja $a_j\in A_j$ siten, että $[a_i,i]=[a_j,j]$. Nyt edeltävän tarkastelun perusteella on olemassa $k\in I$ siten, että $k\geq i$, $k\geq j$ ja $\rho_{ik}(a_i)=\rho_{jk}(a_j)$. Täten

$$\psi_i(a_i)=\psi_k(\rho_{ik}(a_i))=\psi_k(\rho_{jk}(a_j))=\psi_j(a_j).$$

Siis f on mielekäs. Olkoot vielä $[a,i],[b,j]\in A$. Nyt

$$\begin{aligned}
f([a,i]+[b,j]) &= f([\rho_{ik}(a)+\rho_{jk}(b),k])\\
&= \psi_k(\rho_{ik}(a)+\rho_{jk}(b))\\
&= \psi_k(\rho_{ik}(a))+\psi_k(\rho_{jk}(b))\\
&= \psi_i(a)+\psi_j(b)\\
&= f([a,i])+f([b,j]).
\end{aligned}$$

Täten f on homomorfismi. Olkoot sitten $i\in I$ ja $a\in A_i$. Tällöin homomorfismin φ_i määritelmän perusteella

$$f(\varphi_i(a))=f([a,i])=\psi_i(a),$$

joten lauseen ehto pätee. Olkoon lopuksi $g\colon A\to B$ homomorfismi siten, että $g\circ\varphi_i=\psi_i$ kaikilla $i\in I$. Olkoon $[a,i]\in A$. Nyt

$$f([a,i])=\psi_i(a)=g(\varphi_i(a))=g([a,i]),$$

joten $f=g$. □

2.4 Oljet ja idut

Olkoot $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X esilyhde ja $P \in X$. Pisteen P ympäristöjen joukko on suunnattu relaationaan sisältyvyysrelaatio, sillä sisältyvyysrelaatio on refleksiivinen ja transitiivinen, ja kaikilla pisteen P ympäristöillä $U, V \subseteq X$ pätee $U \cap V \subseteq U$ ja $U \cap V \subseteq V$, sekä $P \in U \cap V$, joten $U \cap V$ on pisteen P ympäristö.
Tarkastellaan esilyhteen $\mathcal{F}$ ja pisteen P määräämää perhettä

$$\{\, \mathcal{F}(U) \mid P \in U, \text{ missä } U \subseteq X \text{ on avoin} \,\}.$$

Nyt $\mathcal{F}(U)$ on Abelin ryhmä kaikilla avoimilla $U \subseteq X$, ja esilyhteellä on määritelmänsä mukaan suoraan rajaan sopiva ryhmähomomorfismi. Täten esilyhteen $\mathcal{F}$ Abelin ryhmistä voidaan muodostaa erillinen yhdiste indeksijoukkonaan pisteen P ympäristöt ja homomorfismeinaan esilyhteen rajoittumakuvaukset.

Määritelmä 2.5 (ks. [4, s. 62])**.** Olkoot X topologinen avaruus, $\mathcal{F}$ avaruuden X esilyhde ja $P \in X$. Määritellään

$$\mathcal{F}_P := \varinjlim \mathcal{F}(U) = \left(\coprod_{U \subseteq X,\, P \in U,\, U \text{ avoin}} \mathcal{F}(U) \right) / \sim .$$

Sanotaan, että $\mathcal{F}_P$ on esilyhteen $\mathcal{F}$ *olki* pisteessä P.

Huomautus. Oljen $\mathcal{F}_P$ alkio on siis ekvivalenssiluokka $[s, U]$, missä $s \in \mathcal{F}(U)$ ja U on pisteen P avoin ympäristö. Täten kaksi oljen $\mathcal{F}_P$ alkiota $[s, U]$ ja $[t, V]$ ovat samat, jos ja vain jos pisteellä P on olemassa avoin ympäristö $W \subseteq U \cap V$ siten, että $\rho_{UW}(s) = \rho_{VW}(t)$.

Määritelmä 2.6 (ks. [4, s. 62])**.** Edellisessä huomautuksessa mainittua oljen $\mathcal{F}_P$ alkiota kutsutaan *iduksi*.

Huomautus. Olkoon $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X esilyhde. Kaikilla avoimilla $U \subseteq X$ on olemassa ryhmähomomorfismi $\varphi_U \colon U \to \mathcal{F}_P$ siten, että

$$\varphi_U(s) = [s, U]$$

kaikilla $s \in \mathcal{F}(U)$.

Esimerkki 2.6. Olkoon $\mathcal{O}$ holomorfisten kuvausten lyhde edellä määritellyllä tavalla. Tällöin $\mathcal{O}_P$ on isomorfinen pisteen P jossakin ympäristössä suppenevien potenssisarjojen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - P)^n$$

kanssa kaikilla $P \in X$.

Todistus. Olkoot $P \in X$, $U \subseteq X$ pisteen P ympäristö ja $f \in \mathcal{O}(U)$. Tällöin $[f, U] \in \mathcal{O}_P$. Määritellään kuvaus φ_P siten, että

$$\varphi_P([f, U]) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(P)}{n!}(z - P)^n.$$

Olkoon $[g, V] \in \mathcal{O}_P$ siten, että $[f, U] = [g, V]$. Nyt f ja g ovat holomorfisia ja siis analyyttisiä, joten on olemassa $r \in \mathbb{Z}_+$ siten, että

$$g(Q) = f(Q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(P)}{n!}(Q - P)^n$$

kaikilla $Q \in B(P, r) \subseteq U \cap V$. Lisäksi tiedetään, että jokaista analyyttistä kuvausta vastaa yksikäsitteinen potenssisarja ja jokainen pisteen P jossakin ympäristössä suppeneva potenssisarja määrittää analyyttisen, eli holomorfisen, kuvauksen, joten φ_P on isomorfismi. $\square$

3 Morfismit

3.1 Esilyhteen ja lyhteen homo- ja isomorfismit

Määritelmä 3.1 (ks. [6, s. 2])**.** Olkoot $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ topologisen avaruuden X esilyhteitä. *Esilyhdehomomorfismi* $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ koostuu ryhmähomomorfismeista $\varphi_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$, missä $U \subseteq X$ on avoin, joille pätee

$$\varphi_V \circ \rho_{UV}^{\mathcal{F}} = \rho_{UV}^{\mathcal{G}} \circ \varphi_U,$$

missä $V \subseteq U$ on avoin ja kuvaukset $\rho^{\mathcal{F}}$ ja $\rho^{\mathcal{G}}$ ovat esilyhteiden $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ rajoittumakuvauksia.

Jos $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ ovat topologisen avaruuden X lyhteitä, niin edellä määritellyn kaltaista kuvausta $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ sanotaan *lyhdehomomorfismiksi.* Jos asiayhteydestä on selvää, puhutaanko esilyhde- tai lyhdehomomorfismista, niin voidaan puhua lyhyemmin homomorfismista.

Määritelmä 3.2 (ks. [5, s. 10])**.** Olkoot $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ja $\psi\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ topologisen avaruuden X esilyhteiden esilyhdehomomorfismeja. Määritellään niiden yhdistetty esilyhdehomomorfismi $\psi \circ \varphi$ siten, että kaikilla avoimilla $U \subseteq X$ pätee

$$(\psi \circ \varphi)_U = \psi_U \circ \varphi_U.$$

Yhdistetty lyhdehomomorfismi määritellään vastaavasti.

Määritelmä 3.3 (ks. [6, s. 3])**.** Olkoon $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ topologisen avaruuden X esilyhteiden esilyhdehomomorfismi. Sanotaan, että φ on *esilyhdeisomorfismi*, mikäli φ_U on ryhmäisomorfismi kaikilla avoimilla $U \subseteq X$. Lyhdeisomorfismi määritellään lyhteille vastaavasti. Tässäkin tapauksessa esilyhde- tai lyhdeisomorfismista voidaan puhua isomorfismina, jos asiayhteydestä on selvää mitä tarkoitetaan.

Huomautus (vrt. [4, s. 63])**.** Olkoon $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ topologisen avaruuden X esilyhteiden esilyhdehomomorfismi. Olkoon $U \subseteq X$ avoin ja määritellään

$$\begin{aligned} \psi_U^{\mathcal{F}}\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_P, \psi_U^{\mathcal{F}}(s) = [s, U], \text{ ja} \\ \psi_U^{\mathcal{G}}\colon \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}_P, \psi_U^{\mathcal{G}}(t) = [t, U] \end{aligned}$$

kaikilla $s \in \mathcal{F}(U)$ ja $t \in \mathcal{G}(U)$. Olkoon $s \in \mathcal{F}(U)$. Tälle pätee

$$\begin{aligned} \psi_U^{\mathcal{G}} \circ \varphi_U(s) &= [\varphi_U(s), U] \\ &= [\rho_{UV}^{\mathcal{G}}(\varphi_U(s)), V] \\ &= [\varphi_V(\rho_{UV}^{\mathcal{F}}(s)), V] \\ &= (\psi_V^{\mathcal{G}} \circ \varphi_V)(\rho_{UV}^{\mathcal{F}}(s)), \end{aligned}$$

joten kun merkitään $f_W = \psi_W^{\mathcal{G}} \circ \varphi_W$ kaikilla $W \subseteq X$, niin saadaan

$$f_U = f_V \circ \rho_{UV}^{\mathcal{F}}$$

kaikilla avoimilla $V \subseteq U \subseteq X$, missä f_U on kuvaus $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}_P$. Täten suoran rajan universaaliominaisuuden (lause 2.2) mukaan on olemassa yksikäsitteinen homomorfismi $\varphi_P \colon \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$, jolle pätee

$$\varphi_P \circ \psi_U^{\mathcal{F}} = f_U = \psi_U^{\mathcal{G}} \circ \varphi_U$$

kaikilla avoimilla $U \subseteq X$, joten saadaan

$$\varphi_P([s, U]) = \varphi_P(\psi_U^F(s)) = \psi_U^{\mathcal{G}}(\varphi_U(s)) = [\varphi_U(s), U]$$

kaikilla $[s, U] \in \mathcal{F}_P$.

Huomautus (ks. [5, s. 10]). Olkoot $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ja $\psi \colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ topologisen avaruuden X esilyhteiden esilyhdehomomorfismeja. Aiemman huomautuksen perusteella

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)_P([s, U]) &= [(\psi \circ \varphi)_U(s), U] \\ &= [\psi_U \circ \varphi_U(s), U] \\ &= \psi_P([\varphi_U(s), U]) \\ &= \psi_P \circ \varphi_P([s, U]), \end{aligned}$$

kaikilla $P \in X$ ja $[s, U] \in \mathcal{F}_P$, joten $(\psi \circ \varphi)_P = \psi_P \circ \varphi_P$.

Lause 3.1. *Olkoon $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ topologisen avaruuden X lyhteiden lyhdehomomorfismi. Homomorfismi φ on isomorfismi, jos ja vain jos indusoidut kuvaukset $\varphi_P \colon \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$ ovat isomorfismeja kaikilla $P \in X$.*

Todistus (vrt. [4, s. 63]). Oletetaan ensin, että φ on isomorfismi. Olkoot $P \in X$ ja $\mathcal{F}_P$ ja $\mathcal{G}_P$ pisteen P oljet vastaavissa lyhteissä. Nyt φ on isomorfismi, joten on olemassa isomorfismi $\psi \colon \mathcal{G} \to \mathcal{F}$, joka koostuu kuvauksien φ_U käänteiskuvauksista ψ_U kaikilla avoimilla $U \subseteq X$. Olkoot $[s, U] \in \mathcal{F}_P$ ja $[t, V] \in \mathcal{G}_P$. Tällöin homomorfismeille φ_P ja ψ_P pätee

$$\begin{aligned} &(\psi_P \circ \varphi_P)([s, U]) = \psi_P([\varphi_U(s), U]) = [\psi_U(\varphi_U(s)), U] = [s, U] \text{ ja} \\ &(\varphi_P \circ \psi_P)([t, V]) = \varphi_P([\psi_V(t), V]) = [\varphi_V(\psi_V(t)), V] = [t, V], \end{aligned}$$

joten φ_P ja ψ_P ovat toistensa käänteiskuvauksia ja siis bijektioita, joten φ_P on isomorfismi.

Oletetaan sitten, että φ_P on isomorfismi kaikilla $P \in U$. Olkoon $U \subseteq X$ avoin, ja osoitetaan, että $\varphi_U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ on isomorfismi:
Osoitetaan φ_U ensin injektioksi. Olkoon $s \in \mathcal{F}(U)$ siten, että $\varphi_U(s) = 0_{\mathcal{G}(U)}$, missä $0_{\mathcal{G}(U)}$ on Abelin ryhmän $\mathcal{G}(U)$ neutraalialkio. Olkoon $P \in U$. Tällöin alkion $[s, U] \in \mathcal{F}_P$ kuva isomorfismin φ_P mukaan on

$$\varphi_P([s, U]) = [\varphi_U(s), U] = [0_{\mathcal{G}(U)}, U].$$

Lisäksi
$$\varphi_P([0_{\mathcal{F}(U)}, U]) = [\varphi_U(0_{\mathcal{F}(U)}), U] = [0_{\mathcal{G}(U)}, U],$$
sillä φ on homomorfismi. Koska φ_P on injektio, niin $[s, U] = [0_{\mathcal{F}(U)}, U]$, jolloin on olemassa avoin $W_P \subseteq U$ siten, että $P \in W_P$ ja $\rho^{\mathcal{F}}_{UW_P}(s) = \rho^{\mathcal{F}}_{UW_P}(0_{\mathcal{F}(U)}) = 0_{\mathcal{F}(W_P)}$, missä $\rho^{\mathcal{F}}$ on lyhteen $\mathcal{F}$ rajoittumakuvaus. Koska P oli mielivaltainen, niin perhe $\{W_P\}_{P \in U}$ muodostaa joukon U avoimen peitteen siten, että $\rho^{\mathcal{F}}_{UW_P}(s) = 0_{\mathcal{F}(W_P)}$ kaikilla $P \in U$, joten lyhteen ominaisuuden (3) perusteella $s = 0_{\mathcal{F}(U)}$, joten φ_U on injektio. Lisäksi, koska U oli mielivaltainen, niin φ_U on injektio kaikilla avoimilla $U \subseteq X$.
Osoitetaan sitten, että φ_U on surjektio. Olkoot $t \in \mathcal{G}(U)$ ja $P \in U$. Nyt $[t, U] \in \mathcal{G}_P$ ja φ_P on surjektio, joten on olemassa $[s'_P, W_P] \in \mathcal{F}_P$, missä $W_P \subseteq X$ on pisteen P ympäristö siten, että
$$\varphi_P([s'_P, W_P]) = [\varphi_{W_P}(s'_P), W_P] = [t, U],$$
sillä φ_P on surjektio. Koska $[\varphi_{W_P}(s'_P), W_P] = [t, U]$, niin on olemassa avoin $V_P \subseteq W_P \cap U$ siten, että
$$\rho^{\mathcal{G}}_{W_P V_P}(\varphi_{W_P}(s'_P)) = \varphi_{V_P}(\rho^{\mathcal{F}}_{W_P V_P}(s'_P)) = \rho^{\mathcal{G}}_{UV_P}(t),$$
missä $\rho^{\mathcal{F}}$ ja $\rho^{\mathcal{G}}$ ovat lyhteiden $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ rajoittumakuvaukset. Merkitään $s_P = \rho^{\mathcal{F}}_{W_P V_P}(s'_P)$. Koska P oli mielivaltainen, niin perhe $\{V_P\}_{P \in U}$ on joukon U avoin peite siten, että $s_P \in \mathcal{F}(V_P)$ ja $\varphi_{V_P}(s_P) = \rho^{\mathcal{G}}_{UV_P}(t)$ kaikilla $P \in U$. Olkoot sitten $Q, R \in U$. Tällöin on olemassa $s_Q \in \mathcal{F}(V_Q)$ ja $s_R \in \mathcal{F}(V_R)$ siten, että
$$\varphi_{V_Q}(s_Q) = \rho^{\mathcal{G}}_{UV_Q}(t).$$
Nyt $V_{QR} = V_Q \cap V_R \subseteq V_Q$, joten
$$\rho^{\mathcal{G}}_{V_Q V_{QR}}(\varphi_{V_Q}(s_Q)) = \rho^{\mathcal{G}}_{V_Q V_{QR}}(\rho^{\mathcal{G}}_{UV_Q}(t)),$$
mistä saadaan
$$\varphi_{V_{QR}}(\rho^{\mathcal{F}}_{V_Q V_{QR}}(s_Q)) = \rho^{\mathcal{G}}_{UV_{QR}}(t).$$
Samoin saadaan
$$\varphi_{V_{QR}}(\rho^{\mathcal{F}}_{V_R V_{QR}}(s_R)) = \rho^{\mathcal{G}}_{UV_{QR}}(t).$$
Täten, koska V_{QR} on avoin, niin aiemman todistuksen perusteella $\varphi_{V_{QR}}$ on injektio, jolloin $\rho^{\mathcal{F}}_{V_Q V_{QR}}(s_Q) = \rho^{\mathcal{F}}_{V_R V_{QR}}(s_R)$, joten lyhteen ominaisuuden (4) perusteella on olemassa $s \in \mathcal{F}(U)$ siten, että $\rho^{\mathcal{F}}_{UV_P}(s) = s_P$ kaikilla $P \in U$. Nyt $\varphi_U(s), t \in \mathcal{G}(U)$ ja
$$\rho^{\mathcal{G}}_{UV_P}(t) = \varphi_{V_P}(s_P) = \varphi_{V_P}(\rho^{\mathcal{F}}_{UV_P}(s)) = \rho^{\mathcal{G}}_{UV_P}(\varphi_U(s))$$
kaikilla $P \in U$, jolloin
$$0_{\mathcal{G}(V_P)} = \rho^{\mathcal{G}}_{UV_P}(t) - \rho^{\mathcal{G}}_{UV_P}(\varphi_U(s)) = \rho^{\mathcal{G}}_{UV_P}(t - \varphi_U(s))$$

kaikilla $P \in U$. Koska joukot V_P, $P \in U$, muodostavat joukon U avoimen peitteen, niin lyhteen ominaisuuden (3) perusteella $t - \varphi_U(s) = 0_{\mathcal{G}(U)}$, jolloin $\varphi_U(s) = t$. Täten, koska U oli mielivaltainen, niin homomorfismi φ_U on surjektio ja siis bijektio kaikilla avoimilla $U \subseteq X$, jolloin φ_U on isomorfismi kaikilla avoimilla $U \subseteq X$, joten φ on isomorfismi. $\square$

Seuraus. Olkoot $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ topologisen avaruuden X lyhteitä. Tästä eteenpäin kun merkitään $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, tarkoitetaan sitä, että on olemassa lyhdeisomorfismi $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$. Täten edeltävän lauseen 3.1 mukaan kaikilla $P \in X$ on myös olemassa isomorfismi $\mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$ ja voidaan merkitä $\mathcal{F}_P = \mathcal{G}_P$.

3.2 Esilyhteeseen liittyvä lyhde

Lause 3.2. *Olkoot X topologinen avaruus ja $\mathcal{F}$ sen esilyhde. Määritellään $\mathcal{F}^+(U)$ kaikilla avoimilla $U \subseteq X$ joukoksi kuvauksia*

$$f\colon U \to \bigcup_{P \in U} \mathcal{F}_P,$$

missä $\mathcal{F}_Q$ on esilyhteen $\mathcal{F}$ olki pisteessä $Q \in U$, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

(1) Kaikilla pisteillä $P \in U$ pätee $f(P) = s_P$, missä $s_P = [s, V] \in \mathcal{F}_P$ jollakin avoimella $V \subseteq X$ siten, että $P \in V$.

(2) Kaikilla pisteillä $P \in U$ on olemassa ympäristö $V \subseteq U$ ja sektio $t \in \mathcal{F}(V)$ siten, että kaikilla $Q \in V$ pätee

$$f(Q) = [t, V],$$

missä $[t, V] \in \mathcal{F}_Q$.

Tällöin $\mathcal{F}^+$ on lyhde.

Todistus (vrt. [4, s. 64]).

(a) Olkoot $U \subseteq X$ avoin ja $f, g \in \mathcal{F}^+(U)$. Nyt lauseen 2.1 mukaan F_P on Abelin ryhmä kaikilla $P \in U$, joten jos laskutoimitus $f + g$ määritellään siten, että

$$(f + g)(P) = f(P) \oplus g(P),$$

kaikilla $P \in X$, missä $\oplus$ on Abelin ryhmän $\mathcal{F}_P$ laskutoimitus, niin $\mathcal{F}^+(U)$ on Abelin ryhmä, jonka nolla-alkiona toimii nollakuvaus.

(b) Olkoot sitten $U, V \subseteq X$ avoimia siten, että $V \subseteq U$. Määritellään $\rho_{UV} : \mathcal{F}^+(U) \to \mathcal{F}^+(V)$ siten, että kaikilla $f \in \mathcal{F}^+(U)$ kuvaus

$$\rho_{UV}(f) = f_{|V}.$$

Tämä on mielekästä, sillä kuvauksen f määritelmän mukaan kaikilla $P \in V$ on olemassa avoin $W \subseteq X$ siten, että $P \in W$ ja $f(P) = [s, W] \in \mathcal{F}_P$, joten

$$\operatorname{im}(f_{|V}) \subseteq \bigcup_{P \in V} \mathcal{F}_P$$

ja $f_{|V}$ toteuttaa lauseen ehdon (1). Lisäksi ehdon (2) mukaan kaikilla pisteillä $P \in V$ on olemassa ympäristö $W \subseteq U$ ja piste $t \in \mathcal{F}(W)$ siten, että kaikilla $Q \in W \cap V$ pätee

$$f(Q) = [t, W] = [\rho_{W(W \cap V)}(t), W \cap V],$$

missä $W \cap V \subseteq U$ on pisteen P ympäristö ja $\rho_{W(W\cap V)}(t) \in \mathcal{F}(W \cap V)$, joten $f_{|V}$ täyttää lauseen ehdon (2). Siis $f_{|V} \in \mathcal{F}^+(V)$. Lopulta olkoon $P \in V$, jolloin

$$\rho_{UV}(f)(P) + \rho_{UV}(g)(P) = f(P) + g(P) = (f+g)(P) = \rho_{UV}(f+g)(P)$$

kaikilla $f, g \in \mathcal{F}^+(U)$, joten ρ_{UV} on ryhmähomomorfismi.

(0) Abelin ryhmä $\mathcal{F}^+(\emptyset)$ on tyhjän kuvauksen yksiönä nollaryhmä.

(1) Olkoon $U \subseteq X$ avoin. Nyt

$$\rho_{UU}(f) = f_{|U} = f,$$

joten ρ_{UU} on identiteettikuvaus.

(2) Olkoon $U, V, W \subseteq X$ avoimia siten, että $W \subseteq V \subseteq U$. Nyt

$$\begin{aligned}(\rho_{VW} \circ \rho_{UV})(f) &= \rho_{VW}(\rho_{UV}(f)) \\ &= \rho_{VW}(f_{|V}) \\ &= f_{|W} \\ &= \rho_{UW}(f).\end{aligned}$$

(3) Olkoot $U \subseteq X$ avoin joukko, $\{V_i\}_{i\in I}$ joukon U avoin peite ja $f \in \mathcal{F}^+(U)$ siten, että

$$\rho_{UV_i}(f) = f_{|V_i} = 0_{V_i}$$

kaikilla $i \in I$. Olkoon $P \in U$. Nyt on olemassa $j \in I$ siten, että $P \in V_j$, jolloin

$$f(P) = \rho_{UV_j}(f)(P) = f_{|V_j}(P) = 0_P \in \mathcal{F}_P,$$

joten $f = 0$.

(4) Olkoot $U \subseteq X$ avoin joukko, $\{V_i\}_{i\in I}$ joukon U avoin peite ja $f_i \in \mathcal{F}^+(V_i)$ kaikilla $i \in I$ siten, että kaikilla $j, k \in I$ pätee, että $\rho_{V_jV_{jk}}(f_j) = \rho_{V_kV_{kj}}(f_k)$, missä $V_{jk} = V_j \cap V_k$. Määritellään kuvaus

$$f \colon U \to \bigcup_{P\in U} F_P$$

siten, että $f(P) = f_i(P)$ kun $P \in V_i$ ja $i \in I$.
Ensinnäkin $f(P)$ on olemassa kaikilla $P \in U$, sillä on olemassa V_i siten, että $P \in V_i$, koska $\{V_i\}_{i\in I}$ on joukon U avoin peite.
Olkoon sitten $P \in U$ siten, että on olemassa $i, j \in I$ siten, että $P \in V_i$ ja $P \in V_j$. Nyt kuvauksen f määritelmän mukaan $f(P) = f_i(P)$ ja $f(P) = f_j(P)$. Lisäksi $P \in V_{ij} = V_i \cap V_j$, joten oletuksen mukaan

$$f_i(P) = \rho_{V_iV_{ij}}(f_i)(P) = \rho_{V_jV_{ij}}(f_j)(P) = f_j(P).$$

Täten $f(P) = f_i(P) \in \mathcal{F}_P$ ja $f(P)$ on yksikäsitteinen, joten kuvauksen f määritelmä on mielekäs. Lisäksi

$$\rho_{UV_i}(f) = f_{|V_i} = f_i.$$

Lopuksi kaikilla $P \in U$ pätee $P \in V_i$, jollakin $i \in I$, joten kuvauksen f_i määritelmän nojalla on olemassa avoin $W \subseteq V_i$ siten, että $P \in W$ ja $t \in \mathcal{F}(W)$ siten, että kaikilla $Q \in W$ pätee

$$f_i(Q) = [t, W],$$

missä $[t, W] \in \mathcal{F}_Q$. Nyt idun määritelmän mukaan $[t, W] = [\rho_{W(U \cap W)}(t), U \cap W]$ ja $W \cap U \subseteq U$, joten kaikilla $Q \in U \cap W$ pätee

$$f(Q) = f_i(Q) = [\rho_{W(U \cap W)}(t), U \cap W],$$

joten kuvaus f toteuttaa määritelmän ehdon (2). On siis on olemassa piste $f \in \mathcal{F}^+(U)$ siten, että $\rho_{UV_i}(f) = f_i$ kaikilla $i \in I$.

$\square$

Määritelmä 3.4 (ks. [4, s. 64])**.** Olkoon $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X esilyhde ja määritellään $\mathcal{F}^+$ kuten yllä. Sanotaan, että $\mathcal{F}^+$ on esilyhteeseen $\mathcal{F}$ *liittyvä lyhde*.

Huomautus. Olkoon $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X esilyhde ja $\mathcal{F}^+$ siihen liittyvä lyhde. Kun puhutaan kuvauksesta $f \in \mathcal{F}^+(U)$, niin voidaan käsitellä tätä kuvausta koordinaateittain ja merkitään

$$f = (s_P)_{P \in U},$$

missä $f(P) = s_P \in \mathcal{F}_P$ kaikilla $P \in U$.

Huomautus. Olkoon $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X esilyhde ja $\mathcal{F}^+$ siihen liittyvä lyhde. Määritellään kaikilla avoimilla $U \subseteq X$ kuvaus

$$\theta_U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}^+(U), \theta_U(s) = ([s, U])_{P \in U}.$$

Olkoot $U \subseteq X$ avoin, $Q \in U$ ja $s \in \mathcal{F}(U)$. Nyt

$$\theta_U(s)(Q) = [s, U] \in \mathcal{F}_P$$

kaikilla $Q \in U$, missä $s \in \mathcal{F}(U)$ ja $U \subseteq U$, joten lauseen 3.2 ehto (2) pätee. Siis $\theta_U(s) \in \mathcal{F}^+(U)$. Lisäksi Abelin ryhmän $\mathcal{F}^+(U)$ määritelmän nojalla θ_U on ryhmähomomorfismi ja täten $\theta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ on esilyhdehomomorfismi. Tästä eteenpäin kun puhutaan esilyhdehomomorfismista $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ tarkoitetaan yllä olevalla tavalla määriteltyä esilyhdehomomorfismia, jos muuta ei mainita.

Seuraavassa lauseessa määritellään tarkemmin, miten yllä esitetty esilyhdehomomorfismi sitoo esilyhdehomomorfismit esilyhteeltä ja esilyhteeseen liittyvältä lyhteeltä mielivaltaiselle lyhteelle. Tämä ominaisuus tunnetaan esilyhteen universaalina ominaisuutena.

Lause 3.3. *Olkoot $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ topologisen avaruuden X esilyhteiden esilyhdehomomorfismi, missä $\mathcal{G}$ on lyhde ja $\theta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ edellä määritellyn mukainen esilyhdehomomorfismi. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen lyhdehomomorfismi $\psi\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ siten, että $\varphi = \psi \circ \theta$.*

Todistus (vrt. [6, s. 4 – 5]). Olkoot $U \subseteq X$ avoin ja $(s_P)_{P\in U} \in \mathcal{F}^+(U)$. Tällöin ryhmän $\mathcal{F}^+(U)$ määritelmän kohdan (2) mukaan jokaisella $P \in U$ on olemassa ympäristö $V_P \subseteq U$ ja $t_P \in \mathcal{F}(V_P)$ siten, että kaikilla $Q \in V_P$ pätee $s_Q = [t_P, V_P]$. Nyt

$$\bigcup_{P\in U} V_P = U,$$

joten $\{V_P\}_{P\in U}$ on joukon U avoin peite. Olkoot $Q, P \in U$. Nyt kaikilla $R \in V_{PQ} = V_P \cap V_Q$ pätee

$$[\rho^{\mathcal{F}}_{V_P V_{PQ}}(t_P), V_{PQ}] = [t_P, V_P] = s_R = [t_Q, V_Q] = [\rho^{\mathcal{F}}_{V_Q V_{PQ}}(t_Q), V_{PQ}].$$

Toisin sanoen kaikilla $R \in V_{PQ}$ on olemassa ympäristö $W_R \subseteq V_{PQ}$ siten, että

$$\rho^{\mathcal{F}}_{V_{PQ}W_R}(\rho^{\mathcal{F}}_{V_P V_{PQ}}(t_P)) = \rho^{\mathcal{F}}_{V_{PQ}W_R}(\rho^{\mathcal{F}}_{V_Q V_{PQ}}(t_Q)),$$

mistä saadaan

$$\rho^{\mathcal{F}}_{V_{PQ}W_R}(\rho^{\mathcal{F}}_{V_P V_{PQ}}(t_P) - \rho^{\mathcal{F}}_{V_Q V_{PQ}}(t_Q)) = 0,$$

joten koska φ on esilyhdehomomorfismi, niin

$$\begin{aligned}
&\rho^{\mathcal{G}}_{V_{PQ}W_R}(\rho^{\mathcal{G}}_{V_P V_{PQ}}(\varphi_{V_P}(t_P)) - \rho^{\mathcal{G}}_{V_Q V_{PQ}}(\varphi_{V_Q}(t_Q))) \\
&= \rho^{\mathcal{G}}_{V_{PQ}W_R}(\varphi_{V_{PQ}}(\rho^{\mathcal{F}}_{V_P V_{PQ}}(t_P)) - \varphi_{V_{PQ}}(\rho^{\mathcal{F}}_{V_Q V_{PQ}}(t_Q))) \\
&= \rho^{\mathcal{G}}_{V_{PQ}W_R}(\varphi_{V_{PQ}}(\rho^{\mathcal{F}}_{V_P V_{PQ}}(t_P) - \rho^{\mathcal{F}}_{V_Q V_{PQ}}(t_Q))) \\
&= \varphi_{W_R}(\rho^{\mathcal{F}}_{V_{PQ}W_R}(\rho^{\mathcal{F}}_{V_P V_{PQ}}(t_P) - \rho^{\mathcal{F}}_{V_Q V_{PQ}}(t_Q))) \\
&= \varphi_{W_R}(0) = 0.
\end{aligned}$$

Lisäksi $\{W_R\}_{R\in V_{PQ}}$ on joukon V_{PQ} avoin peite, joten koska $\mathcal{G}$ on lyhde, niin lyhteen ominaisuuden (3) nojalla saadaan

$$\rho^{\mathcal{G}}_{V_P V_{PQ}}(\varphi_{V_P}(t_P)) - \rho^{\mathcal{G}}_{V_Q V_{PQ}}(\varphi_{V_Q}(t_Q)) = 0,$$

mistä seuraa

$$\rho^{\mathcal{G}}_{V_P V_{PQ}}(\varphi_{V_P}(t_P)) = \rho^{\mathcal{G}}_{V_Q V_{PQ}}(\varphi_{V_Q}(t_Q))$$

kaikilla $P, Q \in U$. Täten, koska $\mathcal{G}$ on lyhde, niin lyhteen ominaisuuden (4) perusteella on olemassa $t \in \mathcal{G}(U)$ siten, että $\rho^{\mathcal{G}}_{UV_P}(t) = \varphi_{V_P}(t_P)$ kaikilla $P \in U$. Lisäksi lyhteen ominaisuuden (3) mukaan tämä t on yksikäsitteinen. Jokaista sektiota $(s_P)_{P\in U} \in \mathcal{F}^+(U)$ vastaa siis yksikäsitteinen sektio $t \in \mathcal{G}(U)$, joten kaikilla avoimilla $U \subseteq X$ voidaan määritellä

$$\psi_U \colon \mathcal{F}^+(U) \to \mathcal{G}(U), \psi_U((s_P)_{P\in U}) = t,$$

missä t on määritelty yllä esitetyllä tavalla. Siis ψ on lyhdehomomorfismi ja tarkastellaan alkiota $s \in \mathcal{F}(U)$. Nyt $\theta_U(s) = ([s,U])_{P\in U} \in \mathcal{F}^+(U)$ ja $\psi_U(([s,U])_{P\in U}) = t$. Osoitetaan vielä, että $\varphi_U(s) = t$. Esilyhteeseen liittyvän lyhteen määritelmän mukaan kaikilla $P \in U$ on olemassa ympäristö $V_P \subseteq U$ ja $t_P \in \mathcal{F}(V_P)$ siten, että $([s,U])_{Q\in V_P} = ([t_P, V_P])_{Q\in V_P}$ ja täten on olemassa avoin $W_P \subseteq V_P \cap U$ siten, että $P \in W_P$ ja

$$\rho^{\mathcal{F}}_{UW_P}(s) = \rho^{\mathcal{F}}_{V_PW_P}(t_P),$$

mistä saadaan sektion t määritelmän mukaan

$$\begin{aligned}
\rho^{\mathcal{G}}_{UW_P}(\varphi_U(s)) &= \varphi_{W_P}(\rho^{\mathcal{F}}_{UW_P}(s)) \\
&= \varphi_{W_P}(\rho^{\mathcal{F}}_{V_PW_P}(t_P)) \\
&= \rho^{\mathcal{G}}_{V_PW_P}(\varphi_{V_P}(t_P)) \\
&= \rho^{\mathcal{G}}_{V_PW_P}(\rho_{UV_P}(t)) \\
&= \rho^{\mathcal{G}}_{UW_P}(t).
\end{aligned}$$

Lisäksi $\{W_P\}_{P\in U}$ on joukon U avoin peite, joten lyhteen ominaisuuden (3) perusteella

$$\varphi_U(s) = t = \psi_U(\theta_U(s)),$$

joten $\varphi = \psi \circ \theta$. □

Lause 3.4. *Olkoot $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X esilyhde, $\theta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ kuten aiemmin, $\mathcal{G}$ topologisen avaruuden X lyhde ja θ' esilyhdehomomorfismi $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ siten, että kun $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ on esilyhdeisomorfismi, niin on olemassa yksikäsitteinen lyhdehomomorfismi $\psi \colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ siten, että $\varphi = \psi \circ \theta'$. Tällöin $\mathcal{F}^+ = \mathcal{G}$.*

Todistus (vrt. [6, s. 5]). Nyt $\theta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ on homomorfismi, joten on olemassa homomorfismi $\eta \colon \mathcal{G} \to \mathcal{F}^+$ siten, että $\theta = \eta \circ \theta'$. Lisäksi θ' on homomorfismi $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$, joten lauseen 3.3 perusteella on olemassa yksikäsitteinen $\xi \colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ siten, että $\theta' = \xi \circ \theta$. Nyt

$$\theta = \eta \circ \theta' = \eta \circ (\xi \circ \theta) = (\eta \circ \xi) \circ \theta.$$

Nyt θ on homomorfismi $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$, joten on olemassa yksikäsitteinen $\varphi \colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{F}^+$ siten, että $\theta = \varphi \circ \theta$, mutta erityisesti

$$\theta = id_{\mathcal{F}^+} \circ \theta,$$

ja φ on yksikäsitteinen, joten koska $\theta = (\eta \circ \xi) \circ \theta$, niin tulee olla $\eta \circ \xi = id_{\mathcal{F}^+}$. Toisaalta

$$\theta' = \xi \circ \theta = \xi \circ (\eta \circ \theta') = (\xi \circ \eta) \circ \theta',$$

mistä vastaavin perusteluin kuin edellä saadaan $\xi \circ \eta = id_{\mathcal{G}}$. Täten η on isomorfismi $\mathcal{G} \to \mathcal{F}^+$, joten $\mathcal{F}^+ = \mathcal{G}$ □

Huomautus (ks. [5, s. 22–23]). Edellisessä lauseessa mainittu yksikäsitteinen isomorfismi

$$\xi\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$$

on siinä mielessä merkittävä, että kaavio

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}^+ \arrow[rr] & & \mathcal{G} \\ & \mathcal{F} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

kommutoi. Tämän perusteella $\mathcal{F}^+$ on "paras" esilyhteestä $\mathcal{F}$ saatava lyhde.

Lause 3.5. *Olkoon $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X lyhde. Tällöin $\mathcal{F} = \mathcal{F}^+$.*

Todistus (vrt. [6, s. 5]). Nyt $id_{\mathcal{F}}$ on esilyhdehomomorfismi $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$, missä $\mathcal{F}$ on lyhde. Lisäksi kaikilla esilyhdehomomorfismeilla $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, missä $\mathcal{G}$ on topologisen avaruuden X lyhde, pätee $\varphi = \varphi \circ id_{\mathcal{F}}$, joten $\mathcal{F}$ täyttää lauseen 3.4 ehdot, jolloin $\mathcal{F} = \mathcal{F}^+$. $\square$

Lause 3.6. *Olkoon $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X esilyhde. Tällöin $\mathcal{F}_P = \mathcal{F}_P^+$.*

Todistus (vrt. [5, s. 23 - 24]). Olkoon $P \in X$. Jos $U \subseteq X$ on avoin siten, että $P \in U$ ja $s \in \mathcal{F}(U)$, niin

$$[\theta_U(s), U] = [([s,U])_{Q\in U}, U] \in \mathcal{F}_P^+$$

ja kaikilla avoimilla $V \subseteq U$ pätee

$$[([s,U])_{Q\in U}, U] = [([\rho_{UV}(s), V])_{Q\in V}, V] = [\theta_V(\rho_{UV}(s)), V],$$

joten suoran rajan universaaliominaisuuden (lause 2.2) perusteella on olemassa yksikäsitteinen esilyhdehomomorfismi $f\colon \mathcal{F}_P \to \mathcal{F}_P^+$, jolle pätee

$$f([s,U]) = [([s,U])_{Q\in U}, U].$$

Todistetaan vielä, että f on bijektio. Olkoon ensin $s = [(s_Q)_{Q\in U}, U] \in \mathcal{F}_P^+$, missä $s \in \mathcal{F}^+(U)$, joten on olemassa avoin $V \subseteq U$ ja $t \in \mathcal{F}(V)$ siten, että kaikilla $Q \in V$ pätee $s_Q = [t, V]$, joten

$$[(s_Q)_{Q\in U}, U] = [(s_Q)_{Q\in V}, V] = [([t,V])_{Q\in V}, V] = f([t,V]),$$

jolloin f on surjektio. Olkoon sitten $[(s_Q)_{Q\in U}, U], [(t_Q)_{Q\in V}, V] \in \mathcal{F}_P^+$ siten, että

$$[(s_Q)_{Q\in U}, U] = [(t_Q)_{Q\in V}, V].$$

Nyt on olemassa avoimet $U' \subseteq U$ ja $V' \subseteq V$, sekä $s \in \mathcal{F}(U')$ ja $t \in \mathcal{F}(V')$ siten, että $s_Q = [s, U']$ ja $t_{Q'} = [t, V']$ kaikilla $Q \in U'$ ja $Q' \in V'$. Tällöin

$$[([s,U'])_{Q\in U'}, U'] = [(s_Q)_{Q\in U}, U] = [(t_Q)_{Q\in V}, V] = [([t,V'])_{Q\in V'}, V'].$$

On siis olemassa avoin $W \subseteq U' \cap V'$ siten, että $P \in W$ ja kaikilla $Q \in W$ pätee $[s, U'] = [t, V']$, joten erityisesti on olemassa $W' \subseteq W$ siten, että $P \in W'$ ja $\rho_{U'W'}(s) = \rho_{V'W'}(t)$, joten $[s, U'] = [t, V']$ ja

$$\begin{aligned} f([s,U']) &= [([s,U'])_{Q\in U'}, U'] = [(s_Q)_{Q\in U}, U], \text{ sekä} \\ f([t,V']) &= [([t,V'])_{Q\in V'}, V'] = [(t_Q)_{Q\in V}, V], \end{aligned}$$

joten f on injektio. Siis f on isomorfismi, joten $\mathcal{F}_P = \mathcal{F}_P^+$. $\square$

3.3 Kuva ja ydin

Määritellään ensin lyhdehomomorfismin kuva ja ydin lyhteiden määrittämien Abelin ryhmien kautta ja todistetaan, että ne ovat esilyhteitä.

Lause 3.7. *Olkoon $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ topologisen avaruuden X lyhteiden homomorfismi. Määritellään kaikilla avoimilla $U \subseteq X$*

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(U) &= \ker(\varphi_U) = \{\, s \in \mathcal{F}(U) \mid \varphi_U(s) = 0 \,\},\\ \mathcal{I}(U) &= \operatorname{im}(\varphi_U) = \{\, \varphi(s) \in \mathcal{G}(U) \mid s \in \mathcal{F}(U) \,\}.\end{aligned}$$

Tällöin $\mathcal{K}$ ja $\mathcal{I}$ ovat esilyhteitä.

Todistus (vrt. [6, s. 5–7]). Olkoot $U, V \subseteq X$ avoimia siten, että $V \subseteq U$. Tällöin $\mathcal{F}(U)$ ja $\mathcal{G}(U)$ ovat Abelin ryhmiä ja $\ker(\varphi_U)$ ja $\operatorname{im}(\varphi_U)$ niiden aliryhminä Abelin ryhmiä. Nyt on olemassa ryhmähomomorfismit $\rho^{\mathcal{F}}_{UV}\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ ja $\rho^{\mathcal{G}}_{UV}\colon \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(V)$.

1. Olkoon sitten $s \in \mathcal{K}(U)$. Tällöin $\varphi_U(s) = 0_{\mathcal{G}(U)}$. Nyt

   $$\varphi_V(\rho^{\mathcal{F}}_{UV}(s)) = \rho^{\mathcal{G}}_{UV}(\varphi_U(s)) = 0_{\mathcal{G}(V)},$$

   jolloin $\rho^{\mathcal{F}}_{UV}(s) \in \mathcal{K}(V)$. Täten $\rho^{\mathcal{F}}_{UV}(\mathcal{K}(U)) \subseteq \mathcal{K}(V)$. Siis $\mathcal{K}$ on esilyhde, kun sen rajoittumakuvauksiksi määritellään rajoittumakuvausten $\rho^{\mathcal{F}}_{UV}$ rajoittumat ryhmille $\mathcal{K}(U)$ kaikilla avoimilla $U, V \subseteq X$.

2. Olkoon seuraavaksi $s \in \mathcal{I}(U)$. Tällöin on olemassa $t \in \mathcal{F}(U)$ siten, että $\varphi_U(t) = s$. Nyt

   $$\varphi_V(\rho^{\mathcal{F}}_{UV}(t)) = \rho^{\mathcal{G}}_{UV}(\varphi_U(t)) = \rho^{\mathcal{G}}_{UV}(s),$$

   joten $\rho^{\mathcal{G}}_{UV}(s) \in \mathcal{I}(V)$. Täten $\rho^{\mathcal{G}}_{UV}(\mathcal{I}(U)) \subseteq \mathcal{I}(V)$. Siis $\mathcal{I}$ on esilyhde, kun sen rajoittumakuvauksiksi määritellään rajoittumakuvausten $\rho^{\mathcal{G}}_{UV}$ rajoittumat ryhmille $\mathcal{I}(U)$ kaikilla avoimilla $U, V \subseteq X$.

□

Määritelmä 3.5 (ks. [5, s. 37: 3.1, s. 49: 6.1])**.** Määritellään topologisen avaruuden X esilyhteet $\mathcal{K}$ ja $\mathcal{I}$ kuten lauseessa 3.7. Tällöin sanotaan, että $\mathcal{K}$ ja $\mathcal{I}$ ovat esilyhdehomomorfismin φ *esilyhdeydin* ja *esilyhdekuva*.

Todistetaan sitten, että edeltävällä tavalla määritelty lyhdehomomorfismin ydin on lyhde.

Lause 3.8. *Olkoot $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ topologisen avaruuden X lyhteitä, $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ näiden lyhteiden homomorfismi ja $\mathcal{K}$ homomorfismin φ esilyhdeydin. Tällöin $\mathcal{K}$ on lyhde.*

Todistus (vrt. [5, s. 38]). Lauseen 3.7 nojalla $\mathcal{K}$ on esilyhde, joten riittää todistaa, että $\mathcal{K}$ täyttää lyhteen ominaisuudet (3) ja (4):

(3) Olkoot $U \subseteq X$ avoin, $\{V_i\}_{i \in I}$ sen avoin peite ja $s \in \mathcal{K}(U)$ siten, että $\rho^{\mathcal{K}}_{UV_i}(s) = 0_{\mathcal{K}(V_i)}$ kaikilla $i \in I$, missä $\rho^{\mathcal{K}}$ on esilyhteen $\mathcal{K}$ rajoittumakuvaus. Nyt $\rho^{\mathcal{K}}$ on lyhteen $\mathcal{F}$ rajoittumakuvauksen $\rho^{\mathcal{F}}$ rajoittuma ja $\mathcal{K}(V) \subseteq \mathcal{F}(V)$ kaikilla avoimilla $V \subseteq X$, joten oletukset pätevät myös homomorfismeille $\rho^{\mathcal{F}}_{UV}$, jolloin $s = 0_{\mathcal{F}(U)}$, mistä seuraa, että $s = 0_{\mathcal{K}(U)}$.

(4) Olkoot $U \subseteq X$ avoin, $\{V_i\}_{i \in I}$ sen avoin peite ja $s_i \in \mathcal{K}(V_i)$ kaikilla $i \in I$ siten, että $\rho^{\mathcal{K}}_{V_j V_{jk}}(s_j) = \rho^{\mathcal{K}}_{V_k V_{kj}}(s_k)$ kaikilla $j, k \in I$, missä $V_{kj} = V_k \cap V_j$. Kaikilla $j \in I$ pätee, että $s_j \in \mathcal{F}(V_j)$, jolloin, koska $\mathcal{F}$ on lyhde, on olemassa $s \in \mathcal{F}(U)$ siten, että $\rho^{\mathcal{F}}_{UV_k}(s) = s_k$ kaikilla $k \in I$. Olkoon $j \in I$. Tällöin esilyhteen $\mathcal{K}$ määritelmän nojalla

$$\rho^{\mathcal{G}}_{UV_j}(\varphi_U(s)) = \varphi_{V_j}(\rho^{\mathcal{F}}_{UV_j}(s)) = \varphi_{V_j}(s_j) = 0_{\mathcal{G}(V_j)}.$$

Nyt $\mathcal{G}$ on lyhde, joten lyhteen ehdon (3) mukaan $\varphi_U(s) = 0_{\mathcal{G}(U)}$, joten $s \in \mathcal{K}(U)$.

$\square$

Määritelmä 3.6 (ks. [5, s. 37])**.** Olkoon $\mathcal{K}$ lyhdehomomorfismin $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ esilyhdeydin. Lyhdettä $\mathcal{K}$ kutsutaan lyhdehomomorfismin φ *ytimeksi* ja merkitään $\ker(\varphi) = \mathcal{K}$.

Lyhdehomomorfismin esilyhdekuva edeltävällä tavalla määriteltyinä ei välttämättä ole lyhde, minkä takia lyhdehomomorfismin kuva määritellään esilyhdekuvaan liittyvänä lyhteenä.

Määritelmä 3.7 (ks. [5, s. 49])**.** Olkoot $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ topologisen avaruuden X lyhteiden lyhdehomomorfismi ja $\mathcal{I}$ sen esilyhdekuva. Esilyhteeseen $\mathcal{I}$ liittyvää lyhdettä $\mathcal{I}^+$ kutsutaan lyhdehomomorfismin φ *kuvaksi* ja merkitään $\mathrm{im}(\varphi) = \mathcal{I}^+$.

Määritelmä 3.8 (ks. [4, s. 64])**.** Olkoot $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ topologisen avaruuden X lyhteiden lyhdehomomorfismi. Sanotaan, että lyhdehomomorfismi φ on *injektio*, jos $\ker(\varphi)$ on nollalyhde.

Määritelmä 3.9 (ks. [4, s. 64])**.** Olkoot $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ topologisen avaruuden X lyhteiden lyhdehomomorfismi. Sanotaan, että lyhdehomomorfismi φ on *surjektio*, jos $\mathrm{im}(\varphi) = \mathcal{G}$.

Todistetaan lopuksi hyödyllinen yhteys lyhdehomomorfismien olkien ja näiden homomorfismien määrittämien ytimen ja kuvan olkien välille.

Lause 3.9. *Olkoon $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ topologisen avaruuden X esilyhteiden esilyhdehomomorfismi. Tällöin* $(\ker(\varphi))_P = \ker(\varphi_P)$.

Todistus (vrt. [5, s. 40]). Olkoot $P \in X$ ja $s_P \in (\ker(\varphi))_P$. On siis olemassa avoin $U \subseteq X$ siten, että $P \in U$ ja $s_P = [s, U]$, missä $s \in \ker(\varphi)(U)$. Toisin sanoen $s \in \mathcal{F}(U)$ ja $\varphi_U(s) = 0$. Nyt siis $[s, U] \in \mathcal{F}_P$ ja

$$\varphi_P([s, U]) = [\varphi_U(s), U] = [0_{\mathcal{G}(U)}, U] = 0_{\mathcal{G}_P},$$

joten $[s,U] \in \ker(\varphi_P)$. Olkoon sitten $[s,U] \in \ker(\varphi_P)$. Nyt siis $[s,U] \in \mathcal{F}_P$ ja $\varphi_P([s,U]) = 0_{\mathcal{G}_P}$. Nyt $s \in \mathcal{F}(U)$ ja

$$\varphi_P([s,U]) = [\varphi_U(s), U] = [0_{\mathcal{G}(U)}, U].$$

On siis olemassa avoin $V \subseteq U$ siten, että $P \in V$ ja

$$\rho_{UV}(\varphi_U(s)) = \rho_{UV}(0_{\mathcal{G}(U)}) = 0_{\mathcal{G}(U)},$$

joten $\varphi_V(\rho_{UV}(s)) = 0_{\mathcal{G}(U)}$, joten

$$[\rho_{UV}(s), V] = [s,U] \in (\ker(\varphi))_P.$$

□

Huomautus. Edeltävän lauseen mukaan topologisen avaruuden X lyhdehomomorfismi $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ on injektio, jos ja vain jos kaikilla pisteillä $P \in X$ ryhmähomomorfismi φ_P on injektio.

Lause 3.10. *Olkoon $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ topologisen avaruuden X lyhteiden esilyhdehomomorfismi. Tällöin* $(\mathrm{im}(\varphi))_P = \mathrm{im}(\varphi_P)$.

Todistus (vrt. [5, s. 50]). Olkoot $P \in X$ ja $t_P \in (\mathrm{im}(\varphi))_P$. On siis olemassa pisteen P ympäristö $U \subseteq X$, $t \in \mathcal{G}(U)$ ja $s \in \mathcal{F}(U)$ siten, että $t_P = [t,U]$ ja $\varphi_U(s) = t$. Nyt $[s,U] \in \mathcal{F}_P$ ja

$$\varphi_P([s,U]) = [\varphi_U(s), U] = [t,U],$$

joten $t_P = [t,U] \in \mathrm{im}(\varphi_P)$. Olkoon sitten $[t,U] \in \mathrm{im}(\varphi_P)$. Tällöin on olemassa $[s,V] \in \mathcal{F}_P$ siten, että

$$\varphi_P([s,V]) = [\varphi_V(s), V] = [t,U],$$

joten on olemassa pisteen P ympäristö $W \subseteq U \cap V$ siten, että $\rho'_{VW}(\varphi_V(s)) = \rho'_{UW}(t)$. Nyt siis $\varphi_W(\rho_{VW}(s)) = \rho'_{UW}(t)$, joten $\rho'_{UW}(t) \in \mathrm{im}(\varphi_W)$, mistä seuraa

$$[\rho'_{UW}(t), W] = [t,U] \in (\mathrm{im}(\varphi))_P.$$

□

Huomautus. Edeltävän lauseen ja lauseen 3.1 mukaan topologisen avaruuden X lyhteiden lyhdehomomorfismi $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ on surjektio, jos ja vain jos kaikilla pisteillä $P \in X$ ryhmähomomorfismi φ_P on surjektio.

Esimerkki 3.1. Tarkastellaan lyhdehomomorfismia $\exp\colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}^*$. Tämä homomorfismi on surjektio, mutta toisaalta $\exp_U\colon \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}^*(U)$ ei ole surjektio jokaisella avoimella $U \subseteq X$.

Todistus. Tarkastellaan avointa joukkoa $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tällöin esimerkiksi identiteettikuvaus $id_X \in \mathcal{O}^*(X)$, mutta kompleksisella logaritmilla ei ole holomorfista haaraa joukossa X, joten identiteettikuvaus ei ole minkään holomorfisen kuvauksen eksponentti. Siis $\exp_X$ ei ole surjektio joukossa X.

Olkoot sitten $P \in \mathbb{C}$ avoin, $U \subseteq \mathbb{C}$ pisteen P ympäristö ja $f \in \mathcal{O}^*(U)$. Tällöin pisteellä P on olemassa ympäristö $V \subseteq U$ siten, että kuvaukselle f löytyy sellainen holomorfinen kompleksisen logaritmin log haara, jolla pätee $\exp(\log(f_{|V}(z))) = f_{|V}(z)$ kaikilla $z \in V$. Lisäksi $[f, U] = [f_{|V}, V]$, joten kaikilla $P \in \mathbb{C}$ homomorfismi $\exp_P$ on surjektio, joten exp on surjektio. $\square$

Huomautus (vrt. [6, s. 114])**.** Olkoon $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ja $\psi \colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ topologisen avaruuden X lyhdehomomorfismeja.

- Jos ψ on injektio, niin $\ker(\psi \circ \varphi) = \ker(\varphi)$, sillä kaikilla $P \in X$ ryhmähomomorfismi φ_P on injektio ja
$$(\ker(\psi \circ \varphi))_P = \ker((\psi \circ \varphi)_P) = \ker(\psi_P \circ \varphi_P) = \ker(\varphi_P) = (\ker(\varphi))_P.$$
- Jos φ on surjektio, niin $\mathrm{im}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{im}(\psi)$, sillä kaikilla $P \in X$ ryhmähomomorfismi φ_P on injektio ja
$$(\mathrm{im}(\psi \circ \varphi))_P = \mathrm{im}((\psi \circ \varphi)_P) = \mathrm{im}(\psi_P \circ \varphi_P) = \mathrm{im}(\psi_P) = (\mathrm{im}(\psi))_P.$$

3.4 Alilyhde

Määritelmä 3.10 (ks. [4, s. 64])**.** Olkoot $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{F}'$ topologisen avaruuden X lyhteitä. Lyhdettä $\mathcal{F}'$ sanotaan lyhteen $\mathcal{F}$ *alilyhteeksi*, jos kaikilla avoimilla $U \subseteq X$ ryhmä $\mathcal{F}'(U)$ on ryhmän $\mathcal{F}(U)$ aliryhmä ja lyhteen $\mathcal{F}'$ rajoittumakuvaukset ovat muotoa
$$\rho'_{UV} \colon \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}'(V), \rho'_{UV}(s) = \rho_{UV}(s),$$
missä $V \subseteq U \subset X$ ovat avoimia ja ρ on lyhteen $\mathcal{F}$ rajoittumakuvaus.

Huomautus. Olkoot $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X lyhde ja $\mathcal{F}'$ sen alilyhde. Kaikilla $P \in X$ olki $\mathcal{F}'_P$ on oljen $\mathcal{F}_P$ aliryhmä.

Todistus. Olkoon $P \in X$. Nyt on olemassa injektiivinen homomorfismi $\varphi \colon \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$, joten $\varphi_P \colon \mathcal{F}'_P \to \mathcal{F}_P$ on injektiivinen ryhmähomomorfismi, joten $\mathcal{F}'_P \subseteq \mathcal{F}_P$ ja $\mathcal{F}'_P$ ja $\mathcal{F}_P$ ovat Abelin ryhmiä, joten $\mathcal{F}'_P$ on oljen $\mathcal{F}_P$ aliryhmä. $\square$

Lause 3.11. *Olkoot $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X lyhde ja $\mathcal{G}$ lyhteen $\mathcal{F}$ alilyhde. Määritellään kaikilla avoimilla $U \subseteq X$*
$$\mathcal{H}(U) = \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U).$$
Tällöin $\mathcal{H}$ on esilyhde. Lisäksi
$$\mathcal{H}_P = \mathcal{F}_P/\mathcal{G}_P$$
kaikilla $P \in X$.

Todistus (vrt. [2, s. 117]). Olkoot $V \subset U \subseteq X$ avoimia. Ensinnäkin $\mathcal{G}(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$, joten määritelmä on järkevä. Nyt $\mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$ on Abelin ryhmien tekijäryhmänä Abelin ryhmä. Ryhmä $\mathcal{F}(\emptyset)$ ja $\mathcal{G}(\emptyset)$ ovat nollaryhmiä, joten myös $\mathcal{F}(\emptyset)/\mathcal{G}(\emptyset)$ on nollaryhmä. Lisäksi $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ indusoi homomorfismin $\mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U) \to \mathcal{F}(V)/\mathcal{G}(V)$. Homomorfismi ρ toteuttaa esilyhteen ehdot (1) ja (2), joten myös sen indusoima homomorfismi toteuttaa nämä ehdot.

Olkoon $P \in X$. Suoran rajan universaaliominaisuuden nojalla on olemassa yksikäsitteinen esilyhdehomomorfismi $f : \mathcal{H}_P \to \mathcal{F}_P/\mathcal{G}_P$, missä

$$f([[s]_{\mathcal{G}(U)}, U]) = [[s, U]]_{\mathcal{G}_P}.$$

Todistetaan vielä, että f on bijektio. Olkoon $[s_P]_{\mathcal{G}_P} \in \mathcal{F}_P/\mathcal{G}_P$. Tällöin $s_P \in \mathcal{F}_P$ ja on olemassa avoin $U \subseteq X$ ja $s \in \mathcal{F}(U)$ siten, että $s_P = [s, U]$. Tällöin $[s]_{\mathcal{G}(U)} \in \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$, joten $[[s]_{\mathcal{G}(U)}, U] \in \mathcal{H}_P$ ja

$$f([[s]_{\mathcal{G}(U)}, U]) = [[s, U]]_{\mathcal{G}_P} = [s_P]_{\mathcal{G}_P}.$$

Siis f on surjektio. Olkoon sitten $[[s]_{\mathcal{G}(U)}, U], [[t]_{\mathcal{G}(V)}, V] \in \mathcal{H}_P$ siten, että

$$[[s, U]]_{\mathcal{G}_P} = f([[s]_{\mathcal{G}(U)}, U]) = f([[t]_{\mathcal{G}(V)}, V]) = [[t, V]]_{\mathcal{G}_P}$$

Tällöin siis $[s, U] = [t, V] + [g, V']$, missä $[g, V'] \in \mathcal{G}_P$, joten

$$[s, U] = [\rho_{V(V \cap V')}(t) + \rho_{V'(V \cap V')}(g), V \cap V'].$$

On siis olemassa avoin $W \subseteq U \cap V \cap V'$ siten, että $P \in W$ ja

$$\rho_{UW}(s) = \rho_{(V \cap V')W}(\rho_{V(V \cap V')}(t) + \rho_{V'(V \cap V')}(g)) = \rho_{VW}(t) + \rho_{V'W}(g),$$

missä $\rho_{V'W}(g) \in \mathcal{G}(W)$. Täten

$$[\rho_{UW}(s)]_{\mathcal{G}(W)} = [\rho_{VW}(t)]_{\mathcal{G}(W)},$$

joten

$$[[s]_{\mathcal{G}(U)}, U] = [[t]_{\mathcal{G}(V)}, V].$$

Siis f on isomorfismi. □

Määritelmä 3.11 (ks. [2, s. 117])**.** Olkoot $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X lyhde ja $\mathcal{G}$ lyhteen $\mathcal{F}$ alilyhde. Määritellään $\mathcal{H}$ kuten edellä ja merkitään siihen liittyvää lyhdettä

$$\mathcal{H}^+ = \mathcal{F}/\mathcal{G}.$$

Sanotaan, lyhde $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ on lyhteen $\mathcal{F}$ *tekijälyhde.*

Huomautus. Olkoot $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X lyhde, $\mathcal{G}$ lyhteen $\mathcal{F}$ alilyhde ja $\mathcal{H}$ kuten edellä. Lauseen 3.11 mukaan

$$\mathcal{H}_P = \mathcal{F}_P/\mathcal{G}_P,$$

ja lauseen 3.6 mukaan

$$(\mathcal{F}/\mathcal{G})_P = \mathcal{H}_P^+ = \mathcal{H}_P = \mathcal{F}_P/\mathcal{G}_P.$$

Huomautus. Olkoot $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X lyhde ja $\mathcal{G}$ lyhteen $\mathcal{F}$ alilyhde. Tällöin on olemassa kanoninen surjektio $\mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{G}$.

Todistus (vrt. [2, s. 117]). Olkoon $P \in X$. Nyt $(\mathcal{F}/\mathcal{G})_P = \mathcal{H}_P$, missä $\mathcal{H}$ on määritelty vastaavasti kuin edellä. Nyt kanoniset surjektiot $\varphi_U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{H}(U) = \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$ kaikilla avoimilla $U \subseteq X$ määräävät surjektion $\mathcal{F} \to \mathcal{H}$, joten koska $\mathcal{H}_P = (\mathcal{F}/\mathcal{G})_P$, niin on olemassa bijektio $\psi_P \colon \mathcal{H}_P \to (\mathcal{F}/\mathcal{G})_P$, joten $\psi_P \circ \varphi_P$ on surjektio $\mathcal{F}_P \to (\mathcal{F}/\mathcal{G})_P$. Täten aiemman tarkastelun perusteella $\psi \circ \varphi$ on surjektio $\mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{G}$. $\square$

4 Lyhteen resoluutio

4.1 Lyhteiden eksaktit jonot

Määritelmä 4.1 (ks. [5, s. 49])**.** Olkoot X topologinen avaruus ja $\mathcal{F}^i$ sen lyhde kaikilla $i \in I$, missä I on mielivaltainen indeksijoukko, sekä

$$\dots \xrightarrow{\varphi^{i-2}} \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathcal{F}^{i} \xrightarrow{\varphi^{i}} \mathcal{F}^{i+1} \xrightarrow{\varphi^{i+1}} \dots$$

lyhteiden ja niiden lyhdehomomorfismien jono. Tätä jonoa kutsutaan *eksaktiksi*, jos $\mathrm{im}(\varphi^{j-1}) = \ker(\varphi^j)$ kaikilla $j \in I$. Edeltävästä jonosta voidaan puhua myös lyhyemmin lyhteiden jonona.

Huomautus. Tässä työssä, kun käsitellään pitkiä jonoja lyhteitä ja niiden lyhdehomomorfismeja, niin ne indeksöidään yläindekseillä kuten edeltävässä määritelmässä.

Huomautus. Olkoot $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ ja $\mathcal{H}$ topologisen avaruuden X lyhteitä. Niiden jono

$$\dots \xrightarrow{\varphi^{i-2}} \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathcal{F}^{i} \xrightarrow{\varphi^{i}} \mathcal{F}^{i+1} \xrightarrow{\varphi^{i+1}} \dots$$

on eksakti, jos kaikilla avoimilla $U \subseteq X$ jono

$$\dots \xrightarrow{\varphi_U^{i-2}} \mathcal{F}^{i-1}(U) \xrightarrow{\varphi_U^{i-1}} \mathcal{F}^{i}(U) \xrightarrow{\varphi_U^{i}} \mathcal{F}^{i+1}(U) \xrightarrow{\varphi_U^{i+1}} \dots$$

on eksakti.

Huomautus (ks. [6, s. 12])**.** Topologisen avaruuden X lyhteiden jono

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$$

on eksakti, jos ja vain jos φ on injektio. Toisaalta, lyhteiden jono

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

on eksakti, jos ja vain jos φ on surjektio. Lopulta topologisen avaruuden X lyhteiden jono

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

on eksakti, jos ja vain jos φ on injektio, ψ on surjektio ja $\mathrm{im}(\varphi) = \ker(\psi)$. Viimeisenä esitelty jono tunnetaan nimellä *lyhyt eksakti jono.*

Huomautus. Määritelmä eksaktille jonolle Abelin ryhmiä on vastaava kuin edellä annettu määritelmä eksaktille jonolle lyhteitä sillä erolla, että lyhdehomomorfismit ovat ryhmähomomorfismeja.

Esimerkki 4.1. Määritellään $2\pi i\mathbb{Z}, \mathcal{O}$ ja $\mathcal{O}^*$ kuten esimerkissä 2.5. Tällöin

$$0 \longrightarrow 2\pi i\mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$$

on lyhyt eksakti jono.

Todistus. Ensinnäkin $2\pi i\mathbb{Z}, \mathcal{O}$ ja $\mathcal{O}^*$ todistettiin lyhteiksi esimerkissä 2.5. Lisäksi lokaalisti vakiot kuvaukset ovat holomorfisia, joten identiteettikuvaus on lyhdehomomorfismi ja injektio. Seuraavaksi esimerkissä 3.1 todistettiin, että exp on lyhdehomomorfismina surjektio, joten riittää osoittaa, että $\mathrm{im}(id) = \ker(\exp)$. Olkoon $U \subseteq \mathbb{Q}$ ja $g \in \mathrm{im}(id_U)$. Nyt siis $f \in 2\pi i\mathbb{Z}(U)$, joten kaikilla $Q \in U$ pätee $f(Q) = 2\pi in$, missä $n \in \mathbb{Z}$, jolloin

$$\exp_U(f)(Q) = e^{f(Q)} = e^{2\pi in} = 1.$$

Siis $f \in \ker(\exp_U)$. Olkoon sitten $f \in \ker(\exp_U)$. Nyt siis $\exp_U(f) = 1_{\mathcal{O}^*(U)}$, joten $f(Q) = 2\pi in$, missä $n \in \mathbb{Z}$, kaikilla $Q \in U$. Lisäksi, koska f on holomorfinen, niin kuvauksen f tulee olla lokaalisti vakio. Siis $f \in 2\pi i\mathbb{Z}(U)$, joten $f \in \mathrm{im}(id_U)$. Täten $\mathrm{im}(id) = \ker(\exp)$, jolloin jono

$$0 \longrightarrow 2\pi i\mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathcal{O} \xrightarrow{exp} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$$

on eksakti. □

Lause 4.1. *Topologisen avaruuden X lyhteiden jono*

$$\dots \xrightarrow{\varphi^{i-2}} \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathcal{F}^{i} \xrightarrow{\varphi^{i}} \mathcal{F}^{i+1} \xrightarrow{\varphi^{i+1}} \dots,$$

$i \in I$, on eksakti, jos ja vain jos niiden olkien jono

$$\dots \xrightarrow{\varphi_P^{i-2}} \mathcal{F}_P^{i-1} \xrightarrow{\varphi_P^{i-1}} \mathcal{F}_P^{i} \xrightarrow{\varphi_P^{i}} \mathcal{F}_P^{i+1} \xrightarrow{\varphi_P^{i+1}} \dots$$

on eksakti kaikilla pisteillä $P \in X$.

Todistus (vrt. [5, s. 50]). Olkoot $i \in I$ ja $P \in X$. Oletetaan ensin, että jono

$$\dots \xrightarrow{\varphi^{i-2}} \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathcal{F}^{i} \xrightarrow{\varphi^{i}} \mathcal{F}^{i+1} \xrightarrow{\varphi^{i+1}} \dots$$

on eksakti. Nyt $\mathrm{im}(\varphi^i) = \ker(\varphi^{i+1})$ ja $\mathrm{im}(\varphi^i)$ ja $\ker(\varphi^{i+1})$ ovat lyhteitä, joten lauseen 3.1 mukaan $(\mathrm{im}(\varphi^i))_P = (\ker(\varphi^{i+1}))_P$ kaikilla $P \in X$. Täten lauseiden 3.9 ja 3.10 nojalla

$$\ker(\varphi_P^{i+1}) = (\ker(\varphi^{i+1}))_P = (\mathrm{im}(\varphi^i))_P = \mathrm{im}(\varphi_P^i)$$

kaikilla $i \in I$, joten jono

$$\dots \xrightarrow{\varphi_P^{i-2}} \mathcal{F}_P^{i-1} \xrightarrow{\varphi_P^{i-1}} \mathcal{F}_P^{i} \xrightarrow{\varphi_P^{i}} \mathcal{F}_P^{i+1} \xrightarrow{\varphi_P^{i+1}} \dots$$

on eksakti. Oletetaan sitten, että jono

$$\dots \xrightarrow{\varphi_{i-2_P}} \mathcal{F}_{i-1_P} \xrightarrow{\varphi_{i-1_P}} \mathcal{F}_{i_P} \xrightarrow{\varphi_{i_P}} \mathcal{F}_{i+1_P} \xrightarrow{\varphi_{i+1_P}} \dots$$

on eksakti kaikilla $P \in X$, joten vastaavin perusteluin kuten edellä

$$(\ker(\varphi^{i+1}))_P = \ker(\varphi_P^{i+1}) = \operatorname{im}(\varphi_P^i) = (\operatorname{im}(\varphi^i))_P$$

kaikilla $i \in I$ ja $P \in X$, joten jono

$$\dots \xrightarrow{\varphi^{i-2}} \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathcal{F}^{i} \xrightarrow{\varphi^{i}} \mathcal{F}^{i+1} \xrightarrow{\varphi^{i+1}} \dots$$

on eksakti. □

Lause 4.2. *Olkoot $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ ja $\mathcal{H}$ topologisen avaruuden X lyhteitä. Jos niiden jono*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

on eksakti, niin Abelin ryhmien jono

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{H}(U)$$

on eksakti kaikilla avoimilla $U \subset X$.

Todistus (vrt. [3, s. 11–12]). Olkoon $U \subseteq X$ avoin. Nyt φ_U on injektio, joten riittää osoittaa, että $\operatorname{im}(\varphi_U) = \ker(\psi_U)$.
Todistetaan ensin, että $\operatorname{im}(\varphi_U) \subseteq \ker(\psi_U)$. Olkoon $t \in \operatorname{im}(\varphi_U)$, joten on olemassa $s \in \mathcal{F}(U)$ siten, että $\varphi_U(s) = t$. Nyt kaikilla $P \in U$ idut $[t, U] \in \mathcal{G}_P$ ja $[s, U] \in \mathcal{F}_P$ ja

$$\varphi_P([s, U]) = [\varphi_U(s), U] = [t, U].$$

Täten $[t, U] \in \operatorname{im}(\varphi_P)$ ja lauseen 4.1 perusteella $\operatorname{im}(\varphi_P) = \ker(\psi_P)$, joten

$$\psi_P([t, U]) = [\psi_U(t), U] = [0_{\mathcal{H}(U)}, U].$$

On siis olemassa avoin $V_P \subseteq U$ siten, että $\rho_{UV_P}(\psi_U(t)) = \rho_{UV_P}(0_{\mathcal{H}(U)}) = 0_{\mathcal{H}(U)}$. Nyt $\{V_P\}_{P\in U}$ muodostaa joukon U avoimen peitteen, joten lyhteen ominaisuuden (3) perusteella $\psi_U(t) = 0_{\mathcal{H}(U)}$, joten $t \in \ker(\psi_U)$.
Todistetaan sitten, että $\ker(\psi_U) \subseteq \operatorname{im}(\varphi_U)$. Olkoot $s \in \mathcal{G}(U)$ siten, että $\psi_U(s) = 0_{\mathcal{H}(U)}$, ja $P \in U$. Nyt $[s, U] \in \mathcal{G}_P$ ja

$$\psi_P([s, U]) = [\psi_U(s), U] = [0, U] = 0_{\mathcal{H}_P}.$$

Tällöin lauseen 4.1 mukaan $\operatorname{im}(\varphi_P) = \ker(\psi_P)$, joten on olemassa $[t_P, V_P] \in \mathcal{F}_P$, missä $V_P \subseteq X$ on avoin siten, että $P \in V_P$, jolle pätee $\varphi_P([t_P, V_P]) = [s, U]$. Lisäksi, koska φ on injektio, niin φ_P on injektio, joten tämä $[t_P, V_P]$ on yksikäsitteinen. Nyt

$$[s, U] = \varphi_P([t_P, V_P]) = [\varphi_{V_P}(t_P), V_P],$$

joten on olemassa avoin $W_P \subseteq U \cap V_P$ siten, että

$$\rho^{\mathcal{G}}_{UW_P}(s) = \rho^{\mathcal{G}}_{V_PW_P}(\varphi_{V_P}(t_P)) = \varphi_{W_P}(\rho^{\mathcal{F}}_{V_PW_P}(t_P))$$

ja merkitään $\rho^{\mathcal{F}}_{VW_P}(t_P) = t_{W_P}$. Näin saadaan joukon U avoin peite $\{W_P\}_{P\in U}$, missä $\varphi_{W_P}(t_{W_P}) = \rho^{\mathcal{G}}_{UW_P}(s)$. Lisäksi kaikilla $W_{PQ} = W_P \cap W_Q$, $P, Q \in U$, pätee

$$\begin{aligned}
\varphi_{W_{PQ}}(\rho^{\mathcal{F}}_{W_PW_{PQ}}(t_{W_P})) &= \rho^{\mathcal{G}}_{W_PW_{PQ}}(\varphi_{W_P}(t_{W_P})) \\
&= \rho^{\mathcal{G}}_{W_PW_{PQ}}(\rho^{\mathcal{G}}_{UW_P}(s)) \\
&= \rho^{\mathcal{G}}_{UW_{PQ}}(s) \\
&= \rho^{\mathcal{G}}_{W_QW_{PQ}}(\rho^{\mathcal{G}}_{UW_Q}(s)) \\
&= \rho^{\mathcal{G}}_{W_QW_{PQ}}(\varphi_{W_Q}(t_{W_Q})) \\
&= \varphi_{W_{PQ}}(\rho^{\mathcal{F}}_{W_QW_{PQ}}(t_{W_Q})).
\end{aligned}$$

Nyt $\varphi_{W_{PQ}}$ on injektio, joten $\rho^{\mathcal{F}}_{W_PU_{PQ}}(t_{W_P}) = \rho^{\mathcal{F}}_{W_QU_{PQ}}(t_{W_Q})$ kaikilla $P, Q \in U$, jolloin lyhteen ominaisuuden (4) nojalla on olemassa $t \in \mathcal{F}(U)$ siten, että kaikilla $P \in U$ pätee $\rho^{\mathcal{F}}_{UW_P}(t) = t_{W_P}$. Lopulta kaikilla $P \in U$ pätee

$$\begin{aligned}
\rho^{\mathcal{G}}_{UW_P}(\varphi_U(t) - s) &= \rho^{\mathcal{G}}_{UW_P}(\varphi_U(t)) - \rho^{\mathcal{G}}_{UW_P}(s) \\
&= \varphi_{W_P}(\rho^{\mathcal{F}}_{UW_P}(t)) - \rho^{\mathcal{G}}_{UW_P}(s) \\
&= \varphi_{W_P}(t_{W_P}) - \rho^{\mathcal{G}}_{UW_P}(s) \\
&= \rho^{\mathcal{G}}_{UW_P}(s) - \rho^{\mathcal{G}}_{UW_P}(s) \\
&= 0_{\mathcal{G}(W_P)},
\end{aligned}$$

joten lyhteen ominaisuuden (3) perusteella $\varphi_U(t) = s$. Siis $s \in \mathrm{im}(\varphi_U)$. □

Esimerkki 4.2. Olkoon

$$0 \longrightarrow 2\pi i\mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$$

kompleksiavaruuden $\mathbb{C}$ lyhyt eksakti jono kuten esimerkissä 4.1. Tällöin jono

$$0 \longrightarrow 2\pi i\mathbb{Z}(X) \xrightarrow{id_X} \mathcal{O}(X) \xrightarrow{\exp_X} \mathcal{O}^*(X) \longrightarrow 0,$$

missä $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ei ole eksakti, sillä lauseessa 3.1 osoitettiin, että $exp_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$ ei ole surjektio.

Huomautus. Kuten edeltävässä esimerkissä huomattiin, lauseen 4.2 eksakti jono ei takaa, että vastaava Abelin ryhmien jono kaikilla avoimilla $U \subseteq X$ on eksakti. Tämä oikeanpuoleisen eksaktiuden puute toimii motivaationa lyhdekohomologialle, jonka avulla voidaan tarkastella, kuinka kaukana nämä jonot ovat eksaktiudesta.

4.2 Godementin lyhde

Lause 4.3. *Olkoon $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X esilyhde. Määritellään kaikilla avoimilla $U \subseteq X$*

$$\mathcal{G}(\mathcal{F})(U) = \{\, f \in \prod_{P \in U} \mathcal{F}_P \mid f = (s_P)_{P\in U},\ \textit{missä } s_P \in \mathcal{F}_P \textit{ kaikilla } P \in U \,\}.$$

Tässä alkio $s_P = [s, V] \in \mathcal{F}_P$, missä $V \subseteq X$ on avoin, $P \in V$ ja $s \in \mathcal{F}(V)$, kaikilla $P \in U$. Tällöin, kun $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ varustetaan perinteisillä rajoittumakuvauksilla niin $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ on lyhde.

Todistus (vrt. [1, s. 27]). Lauseessa 3.2 todistettiin, että kyseisellä tavalla määritelty rakenne on lyhde, jos siihen liitetään lisäehto. Tätä lisäehtoa ei kuitenkaan tarvittu kyseessä olevan rakenteen lyhteeksi todistamiseen, joten $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ on lyhde. □

Määritelmä 4.2. Olkoon $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X esilyhde. Tällöin edeltävällä tavalla määritelty lyhde $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ tunnetaan nimellä *lyhteen $\mathcal{F}$ Godementin lyhde.*

Määritellään sitten luonnollinen homomorfismi esilyhteeltä sen määrittämälle Godementin lyhteelle, ja todistetaan, että kyseinen homomorfismi on injektio.

Huomautus (ks. [1, s. 27])**.** Olkoon $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X esilyhde. Määritellään kaikilla avoimilla $U \subseteq X$ kuvaus

$$j_U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(\mathcal{F})(U), j_U(s) = ([s, U])_{P\in U}.$$

Tällöin j on esilyhdehomomorfismi $\mathcal{F} \to \mathcal{G}(\mathcal{F})$, kuten todettiin lauseen 3.2 jälkeisessä huomautuksessa.

Lause 4.4. *Olkoon $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X lyhde. Tällöin edeltävällä tavalla määritelty homomorfismi*

$$j \ :\ \mathcal{F} \ \to \ \mathcal{G}(\mathcal{F})$$

on injektio.

Todistus (vrt. [3, s. 4]). Olkoon $U \subseteq X$ avoin ja $s \in \mathcal{F}(U)$ siten, että $j_U(s) = 0$. Nyt siis

$$j_U(s) = ([s, U])_{P\in U} = ([0_{\mathcal{F}(U)}, U])_{P\in U},$$

joten kaikilla pisteillä $P \in U$ on olemassa ympäristö $V_P \subseteq U$ siten, että $\rho_{UV_P}(s) = 0_{\mathcal{F}(V_P)}$. Tällöin, koska $\{V_P\}_{P\in U}$ on joukon U avoin peite ja $\mathcal{F}$ on lyhde, niin lyhteen ominaisuuden (3) perusteella $s = 0_{\mathcal{F}(U)}$, joten j_U on injektio kaikilla avoimilla $U \subseteq X$. Täten j on injektio. □

Huomautus. Olkoon $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ topologisen avaruuden X lyhteiden homomorfismi. Tällöin ryhmähomomorfismit φ_P indusoivat lyhdehomomorfismin

$$\mathcal{G}(\varphi)\colon \mathcal{G}(\mathcal{F}) \to \mathcal{G}(\mathcal{G}),$$

missä kaikilla avoimilla $U \subseteq X$ pätee

$$\mathcal{G}(\varphi)_U((s_P)_{P\in U}) = (\varphi_P(s_P))_{P\in U}.$$

Todistetaan sitten, että lyhyt eksakti jono määrittää vastaavien Godementin lyhteiden lyhyen eksaktin jonon.

Lause 4.5. *Olkoon*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

topologisen avaruuden X lyhteiden eksakti jono. Tällöin jono

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\mathcal{G}(\varphi)} \mathcal{G}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\mathcal{G}(\psi)} \mathcal{G}(\mathcal{H}) \longrightarrow 0$$

on eksakti.

Todistus (vrt. [1, s. 27]). Todetaan ensin, että lauseen 4.1 perusteella jono

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_P \xrightarrow{\varphi_P} \mathcal{G}_P \xrightarrow{\psi_P} \mathcal{H}_P \longrightarrow 0$$

on eksakti kaikilla $P \in X$. Olkoon $U \subseteq X$ avoin ja tarkastellaan Abelin ryhmien jonoa

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{F})(U) \xrightarrow{\mathcal{G}(\varphi)_U} \mathcal{G}(\mathcal{G})(U) \xrightarrow{\mathcal{G}(\psi)_U} \mathcal{G}(\mathcal{H})(U) \longrightarrow 0.$$

Olkoon $(s_P)_{P\in U} \in \mathcal{G}(\mathcal{F})(U)$ siten, että $\mathcal{G}(\varphi)_U((s_P)_{P\in U}) = 0$. Tällöin siis

$$\mathcal{G}(\varphi)_U((s_P)_{P\in U}) = (\varphi_P(s_P))_{P\in U} = 0,$$

ja koska φ_P on injektio kaikilla $P \in X$, niin $s_P = 0$ kaikilla $P \in U$, joten $(s_P)_{P\in U} = 0$. Siis $\mathcal{G}(\varphi)_U$ on injektio. Olkoon sitten $(t_P)_{P\in U} \in \mathcal{G}(\mathcal{H})(U)$. Nyt ψ_P on surjektio kaikilla $P \in X$, joten kaikilla t_P on olemassa $s_P \in \mathcal{G}_P$ siten, että $\psi_P(s_P) = t_P$. Lisäksi $(s_P)_{P\in U} \in \mathcal{G}(\mathcal{G})(U)$ ja

$$\mathcal{G}(\psi)_U((s_P)_{P\in U}) = (\psi_P(s_P))_{P\in U} = (t_P)_{P\in U},$$

joten $\mathcal{G}(\psi)_U$ on surjektio. Todistetaan vielä, että $\operatorname{im}(\mathcal{G}(\varphi)_U) = \ker(\mathcal{G}(\psi)_U)$. Olkoon $(t_P)_{P\in U} \in \operatorname{im}(\mathcal{G}(\varphi)_U)$. On siis olemassa $(s_P)_{P\in U} \in \mathcal{G}(\mathcal{F})(U)$ siten, että $\mathcal{G}(\varphi)_U((s_P)_{P\in U}) = (t_P)_{P\in U}$. Nyt, koska $\operatorname{im}(\varphi_P) = \ker(\psi_P)$ kaikilla $P \in X$, niin

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(\psi)_U((t_P)_{P\in U}) &= \mathcal{G}(\psi)_U(\mathcal{G}(\varphi)_U((s_P)_{P\in U})) \\
&= \mathcal{G}(\psi)_U((\varphi_P(s_P))_{P\in U}) \\
&= (\psi_P(\varphi_P(s_P)))_{P\in U} \\
&= (0)_{P\in U} = 0,
\end{aligned}$$

joten $(t_P)_{P\in U} \in \ker(\mathcal{G}(\psi)_U)$. Olkoon sitten $(t_P)_{P\in U} \in \ker(\mathcal{G}(\psi)_U)$. Nyt

$$\mathcal{G}(\psi)_U((t_P)_{P\in U}) = (\psi_P(t_P))_{P\in U} = 0,$$

joten $\psi_P(t_P) = 0$ kaikilla $P \in U$. Täten, koska $\operatorname{im}(\varphi_P) = \ker(\psi_P)$ kaikilla $P \in X$, niin kaikilla $P \in U$ on olemassa $s_P \in \mathcal{G}_P$ siten, että $\varphi_P(s_P) = t_P$. Lisäksi, $(s_P)_{P\in u} \in \mathcal{G}(\mathcal{F})(U)$ ja

$$\mathcal{G}(\varphi)_U((s_P)_{P\in U}) = (\varphi_P(s_P))_{P\in U} = (t_P)_{P\in U},$$

joten $(t_P)_{P\in U} \in \operatorname{im}(\mathcal{G}(\varphi)_U)$. Siis $\operatorname{im}(\mathcal{G}(\varphi)_U) = \ker(\mathcal{G}(\psi)_U)$. Täten

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{F})(U) \xrightarrow{\mathcal{G}(\varphi)_U} \mathcal{G}(\mathcal{G})(U) \xrightarrow{\mathcal{G}(\psi)_U} \mathcal{G}(\mathcal{H})(U) \longrightarrow 0.$$

on eksakti kaikilla avoimilla $U \subseteq X$, joten

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\mathcal{G}(\varphi)} \mathcal{G}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\mathcal{G}(\psi)} \mathcal{G}(\mathcal{H}) \longrightarrow 0$$

on eksakti. □

Määritelmä 4.3 (ks. [1, s. 27])**.** Olkoot $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X lyhde ja $j\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}(\mathcal{F})$ lauseen 4.3 mukaan määritelty lyhdehomomorfismi. Määritellään

$$\begin{aligned} C^0(\mathcal{F}) &= \mathcal{F} \\ C^1(\mathcal{F}) &= \mathcal{G}(\mathcal{F})/\operatorname{im}(j) \\ C^{n+1}(\mathcal{F}) &= C^1(C^n(\mathcal{F})) = \mathcal{G}(C^n(\mathcal{F}))/\operatorname{im}(d^{n-1}), \end{aligned}$$

missä $d^0 = j$ ja homomorfismit $d^n\colon C^n(\mathcal{F}) \to C^{n+1}(\mathcal{F})$, kun $n > 0$, määritellään rekursiivisesti lauseen lause: F lyhde, j injektio mukaisen homomorfismin

$$j^n\colon C^n(\mathcal{F}) \to \mathcal{G}(C^n(\mathcal{F}))$$

ja kanonisen surjektion

$$\pi^n\colon \mathcal{G}(C^n(\mathcal{F})) \to \mathcal{G}(C^n(\mathcal{F}))/\operatorname{im}(d^{n-1})$$

yhdistettynä kuvauksena $d^n = \pi^n \circ j^n$.

Lause 4.6. *Olkoon*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

topologisen avaruuden X lyhteiden eksakti jono. Tällöin kaavio

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G}(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{G}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathcal{G}(\mathcal{H}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C^1(\mathcal{F}) & \longrightarrow & C^1(\mathcal{G}) & \longrightarrow & C^1(\mathcal{H}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

kommutoi, sekä kaavion rivit ja sarakkeet ovat eksakteja.

Todistus (vrt. [6, s. 116]). Lauseiden 4.3 ja 4.5 mukaan kaavion

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G}(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{G}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathcal{G}(\mathcal{H}) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

rivit ovat eksakteja, ja todistetaan vielä, että kyseinen kaavio kommutoi. Olkoon $U \subseteq X$ avoin ja $s \in \mathcal{F}(U)$. Nyt

$$\mathcal{G}(\varphi)_U(j_U^{\mathcal{F}}(s)) = \mathcal{G}(\varphi)(([s,U])_{P\in U}) = ([\varphi_U(s),U])_{P\in U} = j_U^{\mathcal{G}}(\varphi_U(s)),$$

joten $\mathcal{G}(\varphi)_U \circ j_{\mathcal{F}_U} = j_U^{\mathcal{G}} \circ \varphi_U$ kaikilla avoimilla $U \subseteq X$, joten $\mathcal{G}(\varphi) \circ j^{\mathcal{F}} = j^{\mathcal{G}} \circ \varphi$. Vastaavilla perusteluilla saadaan

$$\mathcal{G}(\psi) \circ j^{\mathcal{G}} = j^{\mathcal{H}} \circ \varphi,$$

joten kaavio kommutoi. Todistetaan seuraavaksi, että jono

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{j^{\mathcal{F}}} \mathcal{G}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\pi^0} \mathcal{G}(\mathcal{F})/\operatorname{im}(j^{\mathcal{F}})$$

on eksakti. Ensinnäkin lauseen 4.4 mukaan $j^{\mathcal{F}}$ on injektio. Olkoot sitten $P \in X$. Nyt lauseen 3.4 mukaan $(\mathcal{G}(\mathcal{F})/\operatorname{im}(j^{\mathcal{F}}))_P = \mathcal{G}(\mathcal{F})_P/(\operatorname{im}(j^{\mathcal{F}}))_P$ ja lauseen 3.10 mukaan $(\operatorname{im}(j^{\mathcal{F}}))_P = \operatorname{im}(j_P^{\mathcal{F}})$, joten tekijäryhmien määritelmän perusteella saadaan $\ker(\pi_P^0) = \operatorname{im}(j_P^{\mathcal{F}})$ ja lauseen 3.9 perusteella $(\ker(\pi^0))_P = \ker(\pi_P^0)$. Täten jono

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_P \xrightarrow{j_P^{\mathcal{F}}} \mathcal{G}(\mathcal{F})_P \xrightarrow{\pi_P^0} (\mathcal{G}(\mathcal{F})/\operatorname{im}(j_{\mathcal{F}}))_P$$

on eksakti kaikilla $P \in X$, joten lauseen 4.1 mukaan jono

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{j_{\mathcal{F}}} \mathcal{G}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\pi^0} \mathcal{G}(\mathcal{F})/\operatorname{im}(j_{\mathcal{F}})$$

on eksakti. Lauseen muut sarakkeet ovat eksakteja vastaavin perusteluin. Todistetaan sitten, että jono

$$0 \longrightarrow C^1(\mathcal{F}) \longrightarrow C^1(\mathcal{G}) \longrightarrow C^1(\mathcal{H}) \longrightarrow 0$$

on eksakti. Olkoon $P \in X$ ja tarkastellaan jonoa

$$0 \longrightarrow C^1(\mathcal{F})_P \xrightarrow{C^1(\varphi)_P} C^1(\mathcal{G})_P \xrightarrow{C^1(\psi)_P} C^1(\mathcal{H})_P \longrightarrow 0,$$

missä kuvaukset $C^1(\varphi)_P$ ja $C^1(\psi)_P$ ovat määritelty siten, että

$$\begin{aligned} C^1(\varphi)_P([s_P]) &= [\mathcal{G}(\varphi)_P(s_P)] \text{ ja} \\ C^1(\psi)_P([t_P]) &= [\mathcal{G}(\psi)_P(t_P)]. \end{aligned}$$

Kaikilla $[s_P] \in C^1(\mathcal{F})_P = (\mathcal{F}/\operatorname{im}(j^{\mathcal{F}}))_P = \mathcal{F}_P/\operatorname{im}(j_P^{\mathcal{F}})$ ja $[t_P] \in \mathcal{G}_P/\operatorname{im}(j_P^{\mathcal{G}})$.

Olkoon $[s_P, U] \in \mathrm{im}(j_P^{\mathcal{F}})$. Nyt on olemassa $s \in \mathcal{F}_P$ siten, että $j_P^{\mathcal{F}}(s) = [s_P, U]$, missä $U \subseteq X$ on avoin. Tällöin homomorfismin $G(\varphi)$ määritelmän ja aiemman tarkastelun mukaan

$$G(\varphi)_P([s_P, U]) = G(\varphi)_P(j_P^{\mathcal{F}}(s)) = j_P^{\mathcal{G}}(\varphi(s)),$$

joten $G(\varphi)_P([s_P, U]) \in \mathrm{im}(j_{\mathcal{G}_P})$. Toistamalla vastaavat perustelut homomorfismille $C^1(\psi)_P$ voidaan todeta, että kuvaukset $C^1(\varphi)_P$ ja $C^1(\psi)_P$ ovat mielekkäitä. Olkoot $[s_P], [s'_P] \in C^1(\mathcal{F})_P$ siten, että

$$\begin{aligned} C^1(\varphi)_P([s_P]) &= [\mathcal{G}(\varphi)_P(s_P)] = [t_P] \text{ ja} \\ C^1(\varphi)_P([s'_P]) &= [\mathcal{G}(\varphi)_P(s'_P)] = [t'_P], \end{aligned}$$

missä $[t_P] = [t'_P]$. Tällöin on olemassa $g_P \in \mathcal{G}_P$ siten, että $t_P = t'_P + j_P^{\mathcal{G}}(g_P)$. Tällöin, koska kaavion toinen rivi on eksakti ja $t_P, t'_P \in \mathrm{im}(\mathcal{G}(\varphi)_P)$, niin

$$\mathcal{G}(\psi)_P(t_P) = \mathcal{G}(\psi)_P(t'_P) = 0,$$

joten kaavion kommutoivuuden perusteella

$$j_P^{\mathcal{H}}(\psi_P(g_P)) = \mathcal{G}(\psi)_P(j_P^{\mathcal{G}}(g_P)) = \mathcal{G}(\psi)_P(t_P - t'_P) = 0.$$

Tällöin $\psi_P(g_P) = 0$, sillä $j_P^{\mathcal{H}}$ on lauseen 4.5 mukaan injektio. Nyt koska kaavion ensimmäinen rivi on eksakti, niin on olemassa $f_P \in \mathcal{F}_P$ siten, että $\varphi_P(f_P) = g_P$. Täten

$$\mathcal{G}(\varphi)_P(j_P^{\mathcal{F}}(f_P)) = j_P^{\mathcal{G}}(\varphi_P(f_P)) = j_P^{\mathcal{G}}(g_P) = t_P - t'_P = \mathcal{G}(\varphi)_P(s_P - s'_P),$$

joten $j^{\mathcal{F}}(f_P) = s'_P - s_P$, sillä edeltävän tarkastelun perusteella $\mathcal{G}(\varphi)_P$ on injektio. Siis $s_P = s'_P - j_P^{\mathcal{F}}(f_P)$, jolloin $[s_P] = [s'_P]$ ja $C^1(\varphi)_P$ on injektio. Todistetaan sitten, että

$$\mathrm{im}(C^1(\varphi)_P) = \ker(C^1(\psi)_P).$$

Kuvauksien $C^1(\varphi)_P$ ja $C^1(\psi)_P$ määritelmien perusteella

$$\mathrm{im}(C^1(\varphi)_P) \subseteq \ker(C^1(\psi)_P).$$

Olkoon sitten $[s_P] \in \ker(C^1(\psi)_P)$. On siis olemassa $[t_P] \in C^1(\mathcal{H})_P$ siten, että $C^1(\psi)_P([s_P]) = [t_P]$ ja $t_P = j_P^{\mathcal{H}}(h_P)$ jollakin $h_P \in \mathcal{H}_P$. Nyt ψ_P on surjektio, joten on olemassa $g_P \in \mathcal{G}_P$ siten, että $\psi_P(g_P) = h_P$. Edeltävä kaavio kommutoi, joten

$$\mathcal{G}(\psi)_P(s_P) = t_P = j_P^{\mathcal{H}}(h_P) = j_P^{\mathcal{H}}(\psi_P(g_P)) = \mathcal{G}(\psi)_P(j_P^{\mathcal{G}}(g_P)),$$

joten $\mathcal{G}(\psi)_P(s_P - j_P^{\mathcal{G}}(g_P)) = 0$. Kaavion toinen rivi on eksakti, joten on olemassa $r_P \in \mathcal{G}(\mathcal{F})_P$ siten, että

$$\mathcal{G}(\varphi)_P(r_P) = s_P - j_P^{\mathcal{G}}(g_P).$$

Tällöin

$$C^1(\varphi)_P([r_P]) = [\mathcal{G}(\varphi)_P(r_P)] = [s_P - j_P^{\mathcal{G}}(g_P)] = [s_P],$$

joten $[s_P] \in \operatorname{im}(C^1(\varphi)_P)$. Siis

$$\operatorname{im}(C^1(\varphi)_P) = \ker(C^1(\psi)_P).$$

Lopuksi, koska $\mathcal{G}(\psi)_P$ on surjektio, niin $C^1(\psi)_P$ on määritelmänsä perusteella surjektio. Täten jono

$$0 \longrightarrow C^1(\mathcal{F})_P \xrightarrow{C^1(\varphi)_P} C^1(\mathcal{G})_P \xrightarrow{C^1(\psi)_P} C^1(\mathcal{H})_P \longrightarrow 0$$

on eksakti kaikilla $P \in X$, joten lauseen 4.1 mukaan jono

$$0 \longrightarrow C^1(\mathcal{F}) \xrightarrow{C^1(\varphi)} C^1(\mathcal{G}) \xrightarrow{C^1(\psi)} C^1(\mathcal{H}) \longrightarrow 0$$

on eksakti. Tällöin kuvauksien $C^1(\varphi)_P$ ja $C^1(\psi)_P$ määritelmien perusteella

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{G}(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{G}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathcal{G}(\mathcal{H}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^1(\mathcal{F}) & \longrightarrow & C^1(\mathcal{G}) & \longrightarrow & C^1(\mathcal{H}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

kommutoi ja sen rivit ja sarakkeet ovat eksakteja. □

4.3 Lyhteen resoluutio

Määritellään seuraavaksi lyhteen resoluutio ja osoitetaan, että Godementin lyhteen avulla saadaan määriteltyä lyhteelle tietty resoluutio.

Määritelmä 4.4 (ks. [3, s. 12])**.** Olkoon $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X lyhde. Sanotaan, että lyhteen $\mathcal{F}$ *resoluutio* on pari $(\mathcal{S}^\bullet, j)$, missä

$$\mathcal{S}^\bullet \colon \mathcal{S}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{S}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{S}^2 \xrightarrow{d^2} \dots$$

on jono topologisen avaruuden X lyhteitä ja $j \colon \mathcal{F} \to \mathcal{S}^0$ on lyhdehomomorfismi siten, että jono

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{S}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{S}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{S}^2 \xrightarrow{d^2} \dots$$

on eksakti.

Lause 4.7. *Olkoon $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X lyhde. Jos määritellään rekursiivisesti*

$$\begin{aligned}
G^0(\mathcal{F}) &= \mathcal{G}\left(C^0(\mathcal{F})\right) = \mathcal{G}(\mathcal{F}) \\
G^1(\mathcal{F}) &= \mathcal{G}\left(C^1(\mathcal{F})\right) = \mathcal{G}\left(\mathcal{G}(\mathcal{F})/\operatorname{im}(j)\right) \\
G^{n+1}(\mathcal{F}) &= \mathcal{G}\left(C^{n+1}(\mathcal{F})\right) = \mathcal{G}\left(G^n(\mathcal{F})/\operatorname{im}(l^n)\right),
\end{aligned}$$

missä $l^n\colon G^n(\mathcal{F}) \to G^{n+1}(\mathcal{F})$*,* $n \geq 0$*, on määritelmän 4.3 homomorfismien*

$$\begin{aligned} \pi^n\colon G^n(\mathcal{F}) &\to C^{n+1}(\mathcal{F}) \text{ ja} \\ j^{n+1}\colon C^{n+1}(\mathcal{F}) &\to \mathcal{G}(C^{n+1}(\mathcal{F})) \end{aligned}$$

yhdistetty homomorfismi $l^n = j^{n+1} \circ \rho^n$ *ja*

$$j\colon \mathcal{F} \to G^0(\mathcal{F}) = \mathcal{G}(\mathcal{F})$$

lauseen 4.3 mukainen lyhdehomomorfismi, niin pari $(G^\bullet, j)$ *on lyhteen* $\mathcal{F}$ *resoluutio, missä*

$$G^\bullet\colon G^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{l^0} G^1(\mathcal{F}) \xrightarrow{l^1} G^2(\mathcal{F}) \xrightarrow{l^2} \dots .$$

Todistus (vrt. [6, s. 114]). Nyt $\mathcal{F}$ on lyhde, joten j on lyhdehomomorfismi, joten riittää osoittaa, että jono

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{j} G^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{l^0} G^1(\mathcal{F}) \xrightarrow{l^1} G^2(\mathcal{F}) \xrightarrow{l^2} \dots$$

on eksakti. Ensinnäkin lauseen 4.4 mukaan j on injektio. Seuraavaksi lauseen 4.6 nojalla jono

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{G}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\pi^0} C^1(\mathcal{F})$$

on eksakti, ja edelleen jono

$$0 \longrightarrow C^1(\mathcal{F}) \xrightarrow{j^1} \mathcal{G}(C^1(\mathcal{F})) \xrightarrow{\pi^1} C^1(C^1(\mathcal{F}))$$

on eksakti. Huomataan sitten, että määritelmiensä mukaan

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(C^1(\mathcal{F})) &= G^1(\mathcal{F}) \text{ ja} \\ C^1(C^1(\mathcal{F})) &= C^2(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

Lisäksi $l^0 = j^1 \circ \pi^0$ ja homomorfismin j^1 injektiivisyyden ja huomautuksen 3.3 mukaan

$$\ker(l^0) = \ker(j^1 \circ \pi^0) = \ker(\pi^0) = \operatorname{im}(j),$$

joten jono

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{j} G^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{l^0} G^1(\mathcal{F})$$

on eksakti. Toistetaan sitten yllä oleva konstruktio lyhteelle $C^2(\mathcal{F})$, jolloin saadaan eksakti jono

$$0 \longrightarrow C^2(\mathcal{F}) \xrightarrow{j^2} \mathcal{G}(C^2(\mathcal{F})) \xrightarrow{\pi^2} C^1(C^2(\mathcal{F})) = C^3(\mathcal{F}).$$

Vastaavasti $l^1 = j^2 \circ \pi^1$ ja edelleen homomorfismin j^2 injektiivisyyden, huomautuksen 3.3 ja aiemman jonon eksaktiuden perusteella

$$\ker(l^1) = \ker(j^2 \circ \pi^1) = \ker(\pi^1) = \operatorname{im}(j^1).$$

Lisäksi π^0 on surjektio kanonisena surjektiona ja täten huomautuksen 3.3 nojalla

$$\ker(l^1) = \mathrm{im}(j^1) = \mathrm{im}(j^1 \circ \pi^0) = \mathrm{im}(l^0),$$

joten saadaan eksakti jono

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{j} G^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{l^0} G^1(\mathcal{F}) \xrightarrow{l^1} G^2(\mathcal{F}).$$

Toistamalla tätä menetelmää saadaan lauseen eksakti jono. □

Lause 4.8. *Olkoon*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

topologisen avaruuden X lyhteiden eksakti jono. Tällöin kaavio

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & G^0(\mathcal{F}) & \longrightarrow & G^0(\mathcal{G}) & \longrightarrow & G^0(\mathcal{H}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & G^1(\mathcal{F}) & \longrightarrow & G^1(\mathcal{G}) & \longrightarrow & G^1(\mathcal{H}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & G^2(\mathcal{F}) & \longrightarrow & G^2(\mathcal{G}) & \longrightarrow & G^2(\mathcal{H}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & , &
\end{array}$$

kommutoi ja sen kaikki rivit ja sarakkeet ovat eksakteja.

Todistus (vrt. [6, s. 115-116: Lemma 6.4.]) Todetaan ensimmäiseksi, että lauseen 4.7 mukaan lauseen kaavion sarakkeet ovat eksakteja. Seuraavaksi lauseen 4.6 nojalla saadaan kommutoiva kaavio

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{G}(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{G}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathcal{G}(\mathcal{H}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^1(\mathcal{F}) & \longrightarrow & C^1(\mathcal{G}) & \longrightarrow & C^1(\mathcal{H}) & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

jonka rivit ja sarakkeet ovat eksakteja ja huomataan, että $G^0(\mathcal{F}) = \mathcal{G}(\mathcal{F})$, joten lauseen ensimmäinen rivi on eksakti. Jatkamalla lauseen 4.6 käyttöä edellisen kaavion kolmanteen riviin saadaan kommutoiva kaavio

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^1(\mathcal{F}) & \longrightarrow & C^1(\mathcal{G}) & \longrightarrow & C^1(\mathcal{H}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{G}(C^1(\mathcal{F})) & \longrightarrow & \mathcal{G}(C^1(\mathcal{G})) & \longrightarrow & \mathcal{G}(C^1(\mathcal{H})) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^1(C^1(\mathcal{F})) & \longrightarrow & C^1(C^1(\mathcal{F})) & \longrightarrow & C^1(C^1(\mathcal{F})) & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

jonka rivit ja sarakkeet ovat eksakteja ja huomataan, että $G^1(\mathcal{F}) = \mathcal{G}(C^1(\mathcal{F}))$ ja $C^2(\mathcal{F}) = C^1(C^1(\mathcal{F}))$, joten lauseen kaavion toinen rivi on eksakti. Jatkamalla tätä prosessia nähdään, että lauseen kaavio kommutoi, ja sen kaikki rivit ovat eksakteja. □

Lause 4.9. *Olkoon*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{F}^3 \xrightarrow{\varphi_3} \dots$$

topologisen avaruuden X lyhteiden eksakti jono. Tällöin kaavio

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}^1 & \longrightarrow & G^0(\mathcal{F}^1) & \longrightarrow & G^1(\mathcal{F}^1) & \longrightarrow & G^2(\mathcal{F}^1) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}^2 & \longrightarrow & G^0(\mathcal{F}^2) & \longrightarrow & G^1(\mathcal{F}^2) & \longrightarrow & G^2(\mathcal{F}^2) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}^3 & \longrightarrow & G^0(\mathcal{F}^3) & \longrightarrow & G^1(\mathcal{F}^3) & \longrightarrow & G^2(\mathcal{F}^3) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & &
\end{array}$$

kommutoi ja kaavion rivit ja sarakkeet ovat eksakteja.

Todistus (vrt. [6, s. 117 Problem 1]). Nyt lauseen 4.7 mukaan kaavion rivit ovat eksakteja. Valitaan mielivaltainen $n \in \mathbb{N}$, ja todetaan, että lauseen 4.6 mukaan on olemassa kommutoiva kaavio

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}^n & \xrightarrow{j^n} & \mathcal{G}(\mathcal{F}^n) & \longrightarrow & C^1(\mathcal{F}^n) \\
 & & \varphi^n \Big\downarrow & & \mathcal{G}(\varphi^n) \Big\downarrow & & C(\varphi^n) \Big\downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}^{n+1} & \xrightarrow{j^{n+1}} & \mathcal{G}(\mathcal{F}^{n+1}) & \longrightarrow & C^1(\mathcal{F}^{n+1}) \\
 & & \varphi^{n+1} \Big\downarrow & & \mathcal{G}(\varphi^{n+1}) \Big\downarrow & & C(\varphi^{n+1}) \Big\downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}^{n+2} & \xrightarrow{j^{n+2}} & \mathcal{G}(\mathcal{F}^{n+2}) & \longrightarrow & C^1(\mathcal{F}^{n+2}), \\
 & & \varphi^{n+2} \Big\downarrow & & \mathcal{G}(\varphi^{n+2}) \Big\downarrow & & C(\varphi^{n+2}) \Big\downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}^{n+3} & \xrightarrow{j^{n+3}} & \mathcal{G}(\mathcal{F}^{n+3}) & \longrightarrow & C^1(\mathcal{F}^{n+3}),
\end{array}$$

jonka rivit ovat eksakteja. Lauseen 4.5 todistuksen perusteella, jos $\mathrm{im}(\varphi^n) = \ker(\varphi^{n+1})$, niin

$$\mathrm{im}(\mathcal{G}(\varphi^n)) = \ker(\mathcal{G}(\varphi^{n+1})),$$

joten kaavion toinen sarake on eksakti. Todistetaan vielä, että $\mathrm{im}(C(\varphi^n)) = \ker(C(\varphi^{n+1}))$. Olkoon $P \in X$. Tällöin Homomorfismille $C(\varphi^m)_P$ pätee

$$C(\varphi^m)_P([s_P]) = [G(\varphi^m)(s_P)]$$

kaikilla $s_P \in C^1(\mathcal{F}^m)$ ja $m \in \mathbb{Z}$. Tällöin $\mathrm{im}(C(\varphi^n)_P) \subseteq \ker(C(\varphi^{n+1})_P)$. Olkoon sitten $[s_P] \in \ker(C(\varphi^{n+1})_P)$. On siis olemassa $t_P \in \mathrm{im}(j_P^{n+2})$ siten, että $G(\varphi^{n+1})_P(s_P) = t_P$. Täten on olemassa $g_P \in \mathcal{F}_P^{n+2}$ siten, että $j_P^{n+2}(g_P) = t_P$. Nyt edellisen kaavion toinen sarake on eksakti, joten $\mathrm{im}(\mathcal{G}(\varphi^{n+1})_P) = \ker(\mathcal{G}(\varphi^{n+2})_P)$ ja siis

$$\mathcal{G}(\varphi^{n+2})_P(t_P) = 0.$$

Lisäksi, koska kaavio kommutoi, niin

$$j_P^{n+3}(\varphi^{n+2}(g_P)) = \mathcal{G}(\varphi^{n+2})_P(j_P^{n+2}(g_P)) = \mathcal{G}(\varphi^{n+2})_P(t_P) = 0.$$

Nyt, koska j_P^{n+3} on injektio, niin $\varphi^{n+2}(g_P) = 0$. Siis $g_P \in \ker(\varphi^{n+2})$. On siis olemassa $f_P \in \mathcal{F}^{n+1}$ siten, että $\varphi_P^{n+1}(f_P) = g_P$. Tästä saadaan

$$\begin{aligned}
G(\varphi^{n+1})_P(s_P) &= t_P \\
&= j_P^{n+2}(g_P) \\
&= j_P^{n+2}(\varphi_P^{n+1}(f_P)) \\
&= G(\varphi^{n+1})_P(j_P^{n+1}(f_P)).
\end{aligned}$$

Saadaan $G(\varphi^{n+1})_P(s_P - j_P^{n+1}(f_P)) = 0$. Toisen sarakkeen eksaktiuden perusteella on siis olemassa $r_P \in \mathcal{G}(\mathcal{F}^n)$ siten, että

$$\mathcal{G}(\varphi^n)_P(r_P) = s_P - j_P^{n+1}(f_P).$$

Nyt

$$C(\varphi^n)_P([r_P]) = [\mathcal{G}(\varphi^n)_P(r_P)] = [s_P - j_P^{n+1}(f_P)] = [s_P].$$

Siis $[s_P] \in \mathrm{im}(C(\varphi^n)_P)$. Toistamalla tätä menetelmää kaikille $n \in \mathbb{N}$ saadaan eksakti jono

$$0 \longrightarrow C^1(\mathcal{F}^1) \longrightarrow C^1(\mathcal{F}^2) \longrightarrow C^1(\mathcal{F}^3) \longrightarrow \dots.$$

Huomataan lisäksi, että $G^0(\mathcal{F}^n) = \mathcal{G}(\mathcal{F}^n)$, jolloin lauseen kaavion toinen sarake on eksakti. Sovelletaan sitten vastaavaa konstruktiota lähtien liikkeelle lyhteestä $C^1(\mathcal{F}^n)$, jolloin lauseen 4.6 mukaan on olemassa kommutoiva kaavio

$$\begin{array}{ccccc}
C^1(\mathcal{F}^n) & \longrightarrow & \mathcal{G}(C^1(\mathcal{F}^n)) & \longrightarrow & C^1(C^1(\mathcal{F}^n)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
C^1(\mathcal{F}^{n+1}) & \longrightarrow & \mathcal{G}(C^1(\mathcal{F}^{n+1})) & \longrightarrow & C^1(C^1(\mathcal{F}^{n+1})) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
C^1(\mathcal{F}^{n+2}) & \longrightarrow & \mathcal{G}(C^1(\mathcal{F}^{n+2})) & \longrightarrow & C^1(C^1(\mathcal{F}^{n+2})), \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
C^1(\mathcal{F}^{n+3}) & \longrightarrow & \mathcal{G}(C^1(\mathcal{F}^{n+3})) & \longrightarrow & C^1(C^1(\mathcal{F}^{n+3})),
\end{array}$$

jonka rivit ovat eksakteja ja ensimmäinen sarake on eksakti edellisen tarkastelun perusteella ja täten vastaavin perusteluin kuin edellä toinen ja kolmas sarake ovat eksakteja. Huomataan lisäksi, että $\mathcal{G}(C^1(\mathcal{F}^n)) = G^1(\mathcal{F}^n)$ ja $C^1(C^1(\mathcal{F}^n)) = C^2(\mathcal{F}^n)$, joten lauseen kaavion toinenkin sarake on eksakti. Toistamalla tätä menetelmää saadaan lauseen kommutoiva kaavio. $\square$

5 Lyhdekohomologia

5.1 Veltto lyhde

Lauseessa 4.2 käsiteltiin topologisen avaruuden X lyhteiden lyhyttä eksaktia jonoa ja todettiin, että kaikissa tapauksissa lyhteiden määrittämä avoimen joukon $U \subseteq X$ abelin ryhmien jono ei ole oikealta eksakti, joten määritellään seuraavaksi lyhteen ominaisuus, jonka ollessa voimassa kyseinen Abelin ryhmien jono on lyhyt eksakti jono.

Määritelmä 5.1 (ks. [2, s. 147])**.** Olkoon $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X lyhde. Sanotaan, että $\mathcal{F}$ on *veltto*, jos homomorfismi

$$\rho_{XU} \colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$$

on surjektio kaikilla avoimilla $U \subseteq X$.

Huomautus (vrt. [6, s. 112])**.** Olkoon $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X veltto lyhde. Olkoot $U, V \subseteq X$ ovat avoimia siten, että $V \subseteq U$ ja $t \in \mathcal{F}(V)$. Tällöin on olemassa $s \in \mathcal{F}(X)$ siten, että $\rho_{XV}(s) = t$, joten

$$t = \rho_{XV}(s) = \rho_{UV}(\rho_{XU}(s)),$$

missä $\rho_{XU}(s) \in \mathcal{F}(U)$. Siis ρ_{UV} on surjektio kaikilla avoimilla $V \subseteq U \subseteq X$.

Todistetaan sitten, että topologisen avaruuden X lyhteiden lyhyt jono määrittää Abelin ryhmien lyhyen eksaktin jonon kaikilla avoimilla $U \subseteq X$, jos lyhteiden jonon ensimmäinen merkittävä lyhde on veltto.

Lause 5.1. *Olkoot $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ ja $\mathcal{H}$ topologisen avaruuden X lyhteitä. Jos $\mathcal{F}$ on veltto ja niiden jono*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eksakti, niin Abelin ryhmien jono

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{H}(U) \longrightarrow 0$$

on eksakti kaikilla avoimilla $U \subseteq X$.

Todistus (vrt. [6, s. 112–113]). Olkoon $U \subseteq X$ avoin. Lauseen 4.2 mukaan jono

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{H}(U)$$

on eksakti, joten riittää todistaa, että ψ_U on surjektio. Olkoot $s \in \mathcal{H}(U)$ ja

$$\mathcal{M} = \{\, (t, V) \mid V \subseteq U, \text{ missä V avoin ja } t \in \mathcal{G}(V) \text{ siten, että } \psi_V(t) = \rho^{\mathcal{H}}_{UV}(s) \,\}.$$

Olkoon $P \in V$, missä $V \subseteq U$ on avoin. Lauseen 4.1 mukaan ψ_P on surjektio ja $[\rho^{\mathcal{H}}_{UV}(s), V] \in \mathcal{H}_P$, joten on olemassa $[t, V'] \in \mathcal{G}_P$ ja $t \in \mathcal{G}(V')$ siten, että

$$\psi_P([t, V']) = [\psi_{V'}(t), V'] = [\rho^{\mathcal{H}}_{UV}(s), V],$$

joten on olemassa avoin $W \subseteq V \cap V'$ siten, että

$$\psi_W(\rho^{\mathcal{G}}_{V'W}(t)) = \rho^{\mathcal{G}}_{V'W}(\psi'_V(t)) = \rho^{\mathcal{H}}_{VW}(\rho^{\mathcal{H}}_{UV}(s)) = \rho^{\mathcal{H}}_{UW}(s),$$

missä $\rho^{\mathcal{G}}_{V'W}(t) \in \mathcal{G}(W)$, joten $(\rho^{\mathcal{G}}_{V'W}(t), W) \in \mathcal{M}$. Siis $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Olkoot $(t_i, V_i), (t_j, V_j) \in \mathcal{M}$ missä $i, j \in I$ ja I on mielivaltainen indeksijoukko. Määritellään $(t_i, V_i) \leq (t_j, V_j)$, jos ja vain jos $V_i \subseteq V_j$ ja $t_i = \rho^{\mathcal{G}}_{V_jV_i}(t_j)$. Olkoot $(t_i, V_i), (t_j, V_j), (t_k, V_k) \in \mathcal{M}$ siten, että $(t_i, V_i) \leq (t_j, V_j) \leq (t_k, V_k)$. Nyt $V_i \subseteq V_i$ ja $\rho^{\mathcal{G}}_{V_iV_i}(t_i) = t_i$, joten $(t_i, V_i) \leq (t_i, V_i)$, joten $\leq$ on refleksiivinen. Lisäksi $V_i \subseteq V_k$ ja

$$\rho^{\mathcal{G}}_{V_kV_i}(t_k) = \rho^{\mathcal{G}}_{V_jV_i}(\rho^{\mathcal{G}}_{V_kV_j}(t_k)) = \rho^{\mathcal{G}}_{V_jV_i}(t_j) = t_i,$$

joten $(t_i, V_i) \leq (t_k, V_k)$, joten $\leq$ on transitiivinen. Oletetaan vielä, että $(t_j, V_j) \leq (t_i, V_i)$. Nyt $V_i = V_j$, ja tällöin

$$t_j = \rho^{\mathcal{G}}_{V_jV_i}(t_j) = t_i,$$

joten $(t_i, V_i) = (t_j, V_j)$. Siis $\leq$ on antisymmetrinen, joten $\leq$ on joukon $\mathcal{M}$ osittainen järjestys. Olkoon $\{(t_i, V_i)\}_{i \in I}$, joukon $\mathcal{M}$ ketju siten, että $(t_i, V_i) \leq (t_j, V_j)$, kun $i \leq j$, missä $i, j \in I$ ja I on järjestetty indeksijoukko. Määritellään

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i.$$

Nyt jokaisella $i \in I$ pätee $V_i \subseteq U$ ja V_i on avoin, joten $V \subseteq U$ ja V on avoin. Nyt $\{V_i\}_{i \in I}$ on joukon V avoin peite ja kaikilla $i, j \in I$ voidaan olettaa, että $i \leq j$, joten kun $(t_i, V_i), (t_j, V_j) \in \mathcal{M}$, niin $V_i \cap V_j = V_i$, jolloin

$$\rho^{\mathcal{G}}_{V_jV_{ji}}(t_j) = \rho^{\mathcal{G}}_{V_jV_i}(t_j) = t_i = \rho^{\mathcal{G}}_{V_iV_i}(t_i) = \rho^{\mathcal{G}}_{V_iV_{ji}}(t_i).$$

Täten lyhteen ominaisuuden (4) perusteella on olemassa $t \in \mathcal{G}(V)$ siten, että kaikilla $i \in I$ pätee $\rho_{VV_i}(t) = t_i$, missä $(t_i, V_i) \in \mathcal{M}$. Lisäksi kun $j \in I$, niin

$$\rho^{\mathcal{H}}_{VV_j}(\psi_V(t)) = \psi_{V_j}(\rho^{\mathcal{G}}_{VV_j}(t)) = \psi_{V_j}(t_j) = \rho^{\mathcal{H}}_{UV_j}(s) = \rho^{\mathcal{H}}_{VV_j}(\rho^{\mathcal{H}}_{UV}(s)),$$

joten

$$\rho^{\mathcal{H}}_{VV_j}(\psi_V(t)) - \rho^{\mathcal{H}}_{VV_j}(\rho^{\mathcal{H}}_{UV}(s)) = \rho^{\mathcal{H}}_{VV_j}(\psi_V(t) - \rho^{\mathcal{H}}_{UV}(s)) = 0,$$

mistä lyhteen ominaisuuden (3) perusteella saadaan $\psi_V(t) = \rho^{\mathcal{H}}_{UV}(s)$, joten $(t, V) \in \mathcal{M}$ ja $(t_i, V_i) \leq (t, V)$ kaikilla $i \in I$. Siis jokaisella joukon $\mathcal{M}$ ketjulla on yläraja. Täten Zornin lemman mukaan joukolla $\mathcal{M}$ on maksimaalinen alkio ja merkitään tätä alkiota $(t_M, V_M) \in \mathcal{M}$. Tehdään vastaoletus, että $V_M \neq U$. Tällöin on olemassa $P \in U \setminus V_M$. Vastaavilla perusteluilla, kuten aiemmin, löydetään $V_P \subseteq U$ ja $t_P \subseteq \mathcal{G}(V_P)$ siten, että $\psi_{V_P}(t_P) = \rho^{\mathcal{H}}_{UV_P}(s)$, joten $(t_P, V_P) \in \mathcal{M}$. Olkoon sitten $W = V_P \cap V_M$, ja merkitään

$$\rho^{\mathcal{G}}_{V_PW}(t_P) - \rho^{\mathcal{G}}_{V_MW}(t_M) = u \in \mathcal{G}(W).$$

Nyt

$$\begin{aligned}
\psi_W(u) &= \psi_W(\rho^{\mathcal{G}}_{V_PW}(t_P) - \rho^{\mathcal{G}}_{V_MW}(t_M)) \\
&= \rho^{\mathcal{H}}_{V_PW}(\psi_{V_P}(t_P)) - \rho^{\mathcal{H}}_{V_MW}(\psi_{V_M}(t_M)) \\
&= \rho^{\mathcal{H}}_{V_PW}(\rho^{\mathcal{H}}_{UV_P}(s)) - \rho^{\mathcal{H}}_{V_MW}(\rho^{\mathcal{H}}_{UV_M}(s)) \\
&= \rho^{\mathcal{H}}_{UW}(s) - \rho^{\mathcal{H}}_{UW}(s) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

joten $u \in \ker(\psi_W)$ ja koska $\ker(\psi_W) = \operatorname{im}(\varphi_W)$, niin on olemassa $v_W \in \mathcal{F}(W)$ siten, että $\varphi_W(v_W) = u$. Nyt koska $\mathcal{F}$ on veltto, niin on olemassa $v \in \mathcal{F}(V_P)$ siten, että $\rho^{\mathcal{F}}_{V_PW}(v) = v_W$. Nyt perhe $\{V_M, V_P\}$ on joukon $V_M \cup V_P$ avoin peite ja

$$\begin{aligned}
\rho^{\mathcal{G}}_{V_MW}(t_M) &= \rho^{\mathcal{G}}_{V_MW}(t_M) - \rho^{\mathcal{G}}_{V_PW}(t_P) + \rho^{\mathcal{G}}_{V_PW}(t_P) \\
&= \rho^{\mathcal{G}}_{V_PW}(t_P) - u \\
&= \rho^{\mathcal{G}}_{V_PW}(t_P) - \varphi_W(v_W) \\
&= \rho^{\mathcal{G}}_{V_PW}(t_P) - \varphi_W(\rho^{\mathcal{F}}_{V_PW}(v)) \\
&= \rho^{\mathcal{G}}_{V_PW}(t_P) - \rho^{\mathcal{G}}_{V_PW}(\varphi_{V_P}(v)) \\
&= \rho^{\mathcal{G}}_{V_PW}(t_P - \varphi_{V_P}(v))
\end{aligned}$$

ja merkitään $t' = t_P - \varphi_{V_P}(v) \in \mathcal{G}(V_P)$. Täten lyhteen ominaisuuden (4) perusteella on olemassa $t \in \mathcal{G}(V_P \cup V_M)$ siten, että $\rho^{\mathcal{G}}_{(V_P\cup V_M)V_P}(t) = t'$ ja $\rho^{\mathcal{G}}_{(V_P\cup V_M)V_M}(t) = t_M$. Lisäksi $V_P \cup V_M \subseteq U$ ja

$$\begin{aligned}
&\rho^{\mathcal{H}}_{(V_P\cup V_M)V_P}(\psi_{V_P\cup V_M}(t) - \rho^{\mathcal{H}}_{U(V_P\cup V_M)}(s)) \\
&\quad= \rho^{\mathcal{H}}_{(V_P\cup V_M)V_P}(\psi_{V_P\cup V_M}(t)) - \rho^{\mathcal{H}}_{(V_P\cup V_M)V_P}(\rho^{\mathcal{H}}_{U(V_P\cup V_M)}(s)) \\
&\quad= \psi_{V_P}(\rho^{\mathcal{G}}_{(V_P\cup V_M)V_P}(t)) - \rho^{\mathcal{H}}_{UV_P}(s) \\
&\quad= \psi_{V_P}(t') - \rho^{\mathcal{H}}_{UV_P}(s) \\
&\quad= \psi_{V_P}(t_P - \varphi_{V_P}(v)) - \rho^{\mathcal{H}}_{UV_P}(s) \\
&\quad= \psi_{V_P}(t_P) - \psi_{V_P}(\varphi_{V_P}(v)) - \rho^{\mathcal{H}}_{UV_P}(s) \\
&\quad= \rho^{\mathcal{H}}_{UV_P}(s) - 0 - \rho^{\mathcal{H}}_{UV_P}(s) \\
&\quad= 0.
\end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan

$$\begin{aligned}
\rho^{\mathcal{H}}_{(V_P \cup V_M)V_M}&(\psi_{V_P \cup V_M}(t) - \rho^{\mathcal{H}}_{U(V_P \cup V_M)}(s)) \\
&= \psi_{V_M}(\rho^{\mathcal{G}}_{(V_P \cup V_M)V_M}(t)) - \rho^{\mathcal{H}}_{UV_M}(s) \\
&= \psi_{V_M}(t_M) - \rho^{\mathcal{H}}_{UV_M}(s) \\
&= \rho^{\mathcal{H}}_{UV_M}(s) - \rho^{\mathcal{H}}_{UV_M}(s) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

joten lyhteen ominaisuuden (3) perusteella

$$\psi_{V_P \cup V_M}(t) - \rho^{\mathcal{H}}_{U(V_P \cup V_M)}(s) = 0.$$

Siis $\psi_{V_P \cup V_M}(t) = \rho^{\mathcal{H}}_{U(V_P \cup V_M)}(s)$, jolloin $(t, V_P \cup V_M) \in \mathcal{M}$ ja $(t_M, V_M) \leq (t, V_P \cup V_M)$, mikä on ristiriidassa alkion (t_M, V_M) maksimaalisuuden kanssa. Siis vastaoletus on väärä ja $V_M = U$. Täten $t_M \in \mathcal{G}(U)$ ja $\psi_U(t_M) = \rho^{\mathcal{H}}_{UU}(s) = s$, joten kuvaus ψ_U on surjektio. $\square$

Lause 5.2. *Olkoon*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eksakti jono topologisen avaruuden X lyhteitä. Jos $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ ovat velttoja, niin $\mathcal{H}$ on veltto.

Todistus (vrt. [6, s. 113]). Olkoon $U \subseteq X$ avoin ja $s \in \mathcal{H}(U)$. Nyt lauseen 5.1 mukaan ψ_U on surjektio, joten on olemassa $t \in \mathcal{G}(U)$ siten, että $\psi_U(t) = s$. Koska $\mathcal{G}$ on veltto, niin on olemassa $t_X \in \mathcal{G}(X)$ siten, että $\rho^{\mathcal{G}}_{XU}(t_X) = t$. Nyt

$$\rho^{\mathcal{H}}_{XU}(\psi_X(t_X)) = \psi_U(\rho^{\mathcal{G}}_{XU}(t_X)) = \psi_U(t) = s,$$

missä $\psi_X(t_X) \in \mathcal{H}(X)$, joten $\rho^{\mathcal{H}}_{XU}$ on surjektio. $\square$

5.2 Godementin resoluutio

Lause 5.3. *Olkoon*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\varphi^0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\varphi^1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\varphi^2} \dots$$

eksakti jono topologisen avaruuden X velttoja lyhteitä. Tällöin tämän jonon indusoima jono Abelin ryhmiä

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^0(U) \xrightarrow{\varphi^0_U} \mathcal{F}^1(U) \xrightarrow{\varphi^1_U} \mathcal{F}^2(U) \xrightarrow{\varphi^2_U} \dots$$

on eksakti kaikilla avoimilla $U \subseteq X$.

Todistus (vrt. [2, s. 149]). Olkoon $U \subseteq X$ avoin. Huomataan ensin, että jono

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\varphi^0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\varphi^1} \mathrm{im}(\varphi^1) \longrightarrow 0$$

on eksakti, sillä φ^1 on surjektio $\mathcal{F}^1 \to \mathrm{im}(\varphi^1)$. Lisäksi $\mathcal{F}^0$ ja $\mathcal{F}^1$ ovat velttoja, joten lauseen 5.3 mukaan $\mathrm{im}(\varphi^1)$ on veltto. Nyt lauseen 5.1 mukaan jono

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^0(U) \xrightarrow{\varphi^0_U} \mathcal{F}^1(U) \xrightarrow{\varphi^1_U} \mathrm{im}(\varphi^1)(U) \longrightarrow 0$$

on eksakti, joten $\mathrm{im}(\varphi^0_U) = \ker(\varphi^1_U)$. Tarkastellaan sitten jonoa

$$0 \longrightarrow \ker(\varphi^2) \xrightarrow{id} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\varphi^2} \mathrm{im}(\varphi^2) \longrightarrow 0.$$

Tämä jono on eksakti, sillä $\mathrm{im}(id) = \ker(\varphi^2)$ ja φ^2 on surjektio $\mathcal{F}^2 \to \mathrm{im}(\varphi^2)$. Lisäksi $\ker(\varphi^2) = \mathrm{im}(\varphi^1)$ on veltto edeltävän tarkastelun mukaan, joten lauseen 5.3 mukaan $\mathrm{im}(\varphi^2)$ on veltto. Täten lauseen 5.1 mukaan jono

$$0 \longrightarrow \mathrm{im}(\varphi^1)(U) \xrightarrow{id_U} \mathcal{F}^2(U) \xrightarrow{\varphi^2_U} \mathrm{im}(\varphi^2)(U) \longrightarrow 0$$

on eksakti. Nyt

$$\ker(\varphi^2_U) = \mathrm{im}(id_U) = \mathrm{im}(\varphi^1_U)$$

Jolloin jono

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^0(U) \xrightarrow{\varphi^0_U} \mathcal{F}^1(U) \xrightarrow{\varphi^1_U} \mathcal{F}^2(U) \xrightarrow{\varphi^2_U} \mathcal{F}^3(U)$$

on eksakti. Toistamalla tätä prosessia saadaan lauseen eksakti jono. □

Lause 5.4. *Olkoon $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X lyhde. Tällöin $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ on veltto.*

Todistus (vrt. [1, s. 27]). Lauseen 4.3 nojalla $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ on lyhde, joten riittää osoittaa, että $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ on veltto.
Olkoon $U \subseteq X$ avoin ja $s = (s_P)_{P\in U} \in \mathcal{G}(\mathcal{F})(U)$. Määritellään kuvaus $t \in \prod_{P\in X} \mathcal{F}_P$ siten, että

$$t(P) = \begin{cases} s_P, & P \in U \\ 0, & P \in X \setminus U. \end{cases}$$

Nyt $s_P \in \mathcal{F}_P$ kaikilla $P \in U$, sillä $s \in \mathcal{G}(\mathcal{F})(U)$ ja lisäksi $0 \in \mathcal{F}_P$ kaikilla $P \in X \setminus U$, joten $t \in \mathcal{G}(\mathcal{F})(X)$ ja

$$\rho_{XU}(t) = t_{|U} = (s_P)_{P\in U} = s,$$

joten ρ_{XU} on surjektio kaikilla avoimilla $U \subseteq X$. □

Määritelmä 5.2 (ks. [3, s. 12])**.** Olkoon $(\mathcal{S}^\bullet, j)$ topologisen avaruuden X lyhteen $\mathcal{F}$ resoluutio. Sanotaan, että pari $(\mathcal{S}^\bullet, j)$ on lyhteen $\mathcal{F}$ *veltto resoluutio*, jos lyhde $\mathcal{S}^n$ on veltto kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Lause 5.5. *Olkoon* $(G^\bullet, j)$ *topologisen avaruuden* X *lyhteen* $\mathcal{F}$ *lauseen 4.7 mukaisesti määritelty resoluutio. Tällöin* $(G^\bullet, j)$ *on lyhteen* $\mathcal{F}$ *veltto resoluutio.*

Todistus (vrt. [3, s. 12–13]). Lauseen 4.7 perusteella $(G^\bullet, j)$ on lyhteen $\mathcal{F}$ resoluutio ja lauseen 5.4 nojalla $G^n(\mathcal{F})$ on veltto kaikilla $n \geq 0$, joten $(G^\bullet, j)$ on lyhteen $\mathcal{F}$ veltto resoluutio. □

Määritelmä 5.3 (ks. [3, s. 13]). Olkoon $(G^\bullet, j)$ topologisen avaruuden X lyhteen $\mathcal{F}$ lauseen 4.7 mukaisesti määritelty resoluutio. Tällöin $(G^\bullet, j)$ tunnetaan lyhteen $\mathcal{F}$ *Godementin resoluutiona.*

5.3 Lyhdekohomologia

Lause 5.6. *Olkoot* $\mathcal{F}$ *topologisen avaruuden* X *lyhde ja* $(S^\bullet, j)$ *lyhteen* $\mathcal{F}$ *veltto resoluutio, missä*

$$\mathcal{S}^\bullet \colon \mathcal{S}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{S}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{S}^2 \xrightarrow{d^2} \ldots .$$

Tällöin Abelin ryhmien jonolle

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}^0(X) \xrightarrow{d^0_X} \mathcal{S}^1(X) \xrightarrow{d^1_X} \mathcal{S}^2(X) \xrightarrow{d^2_X} \ldots$$

pätee $d^n_X \circ d^{n-1}_X = 0$ *kaikilla* $n \in \mathbb{N}$*, missä* d^{-1} *on nollahomomorfismi.*

Todistus (vrt. [6, s. 118]). Nyt resoluution määritelmän perusteella jono

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{S}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{S}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{S}^2 \xrightarrow{d^2} \ldots$$

on eksakti ja lisäksi d^{-1} on nollahomomorfismi, joten kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee $d^n \circ d^{n-1} = 0$. Siis

$$d^n_X \circ d^{n-1}_X = (d^n \circ d^{n-1})_X = 0$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. □

Edeltävä jono Abelin ryhmiä ei kuitenkaan ole välttämättä eksakti, joten algebrallisesti on mielenkiintoista selvittää, kuinka kaukana kyseinen jono Abelin ryhmiä on eksaktiudesta. Tätä varten lyhteen $\mathcal{F}$ resoluutiolle määritellään kohomologiaryhmät.

Määritelmä 5.4 (ks. [6, s. 118]). Olkoot $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X lyhde ja $(S^\bullet, j)$ sen veltto resoluutio, missä

$$\mathcal{S}^\bullet \colon \mathcal{S}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{S}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{S}^2 \xrightarrow{d^2} \ldots .$$

Määritellään lyhteen $\mathcal{F}$ *kohomologia* siten, että lyhteen $\mathcal{F}$ *n:s kohomologiaryhmä*

$$H^n(X, \mathcal{F}) = \ker(d^n_X)/\operatorname{im}(d^{n-1}_X),$$

missä d^{-1}_X on nollahomomorfismi.

Huomautus. Edeltävä määritelmä on järkevä, sillä lauseen 5.6 mukaan

$$\operatorname{im}(d_X^{n-1}) \subseteq \ker(d_X^n).$$

Lause 5.7. *Olkoot $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X lyhde ja $(S^\bullet, j)$ sen veltto resoluutio, missä*

$$\mathcal{S}^\bullet \colon \mathcal{S}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{S}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{S}^2 \xrightarrow{d^2} \ldots.$$

Tällöin

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X).$$

Todistus (vrt. [6, s. 119]). Nyt määritelmänsä mukaan

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \ker(d_X^0)/\operatorname{im}(d_X^{-1})$$

ja koska d_X^{-1} on nollahomomorfismi, niin $\ker(d_X^0)/\operatorname{im}(d_X^{-1}) = \ker(d_X^0)$. Nyt jono

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{S}^0 \xrightarrow{d^0} \operatorname{im}(d^0) \longrightarrow 0$$

on eksakti, joten jono

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{j_X} \mathcal{S}^0(X) \xrightarrow{d_X^0} \operatorname{im}(d^0)(X)$$

on eksakti lauseen 4.2 perusteella. Siis $\operatorname{im}(j_X) = \ker(d_X^0)$. Lisäksi $j_X \colon \mathcal{F}(X) \to S^0(X)$ on injektio, joten j_X on bijektio $\mathcal{F}(X) \to \operatorname{im}(j_X) \subseteq S^0(X)$, ja täten saadaan

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \ker(d_X^0)/\operatorname{im}(d_X^{-1}) = \ker(d_X^0) = \operatorname{im}(j_X) = \mathcal{F}(X).$$

□

Lause 5.8. *Olkoon*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

topologisen avaruuden X lyhteiden eksakti jono. Tällöin on olemassa eksakti Abelin ryhmien jono

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow\ & H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow\ H^0(X, \mathcal{G}) \longrightarrow\ H^0(X, \mathcal{H}) \\
\longrightarrow\ & H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow\ H^1(X, \mathcal{G}) \longrightarrow\ H^1(X, \mathcal{H}) \\
\longrightarrow\ & H^2(X, \mathcal{F}) \longrightarrow\ H^2(X, \mathcal{G}) \longrightarrow\ H^2(X, \mathcal{H}) \longrightarrow \ldots,
\end{aligned}$$

jossa kohomologiaryhmät ovat muodostettu lyhteiden $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ ja $\mathcal{H}$ Godementin resoluutioista.

Todistus (vrt. [6, s. 124–128]). Todetaan ensin, että lauseiden 4.2 ja 5.7 nojalla jono

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{H})$$

on eksakti. Todistetaan sitten, että kaikilla $n \geq 1$ on olemassa eksakti jono

$$H^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{G}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{H}).$$

Nyt lauseen 4.8 perusteella saadaan kommutoiva kaavio

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & G^0(\mathcal{F}) & \longrightarrow & G^0(\mathcal{G}) & \longrightarrow & G^0(\mathcal{H}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & G^1(\mathcal{F}) & \longrightarrow & G^1(\mathcal{G}) & \longrightarrow & G^1(\mathcal{H}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & G^2(\mathcal{F}) & \longrightarrow & G^2(\mathcal{G}) & \longrightarrow & G^2(\mathcal{H}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & ,
\end{array}$$

jonka kaikki rivit ja sarakkeet ovat eksakteja ja lauseen 5.5 perusteella kaavion ensimmäistä rivi lukuunottamatta kaikki kaavion lyhteet ovat velttoja. Täten lauseen 5.3 perusteella saadaan kommutoiva kaavio

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & G^0(\mathcal{F})(X) & \xrightarrow{\varphi^0_X} & G^0(\mathcal{G})(X) & \xrightarrow{\psi^0_X} & G^0(\mathcal{H})(X) & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle l^0_{\mathcal{F}_X}}\downarrow & & {\scriptstyle l^0_{\mathcal{G}_X}}\downarrow & & {\scriptstyle l^0_{\mathcal{H}_X}}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & G^1(\mathcal{F})(X) & \xrightarrow{\varphi^1_X} & G^1(\mathcal{G})(X) & \xrightarrow{\psi^1_X} & G^1(\mathcal{H})(X) & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle l^1_{\mathcal{F}_X}}\downarrow & & {\scriptstyle l^1_{\mathcal{G}_X}}\downarrow & & {\scriptstyle l^1_{\mathcal{H}_X}}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & G^2(\mathcal{F})(X) & \xrightarrow{\varphi^2_X} & G^2(\mathcal{G})(X) & \xrightarrow{\psi^2_X} & G^2(\mathcal{H})(X) & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle l^2_{\mathcal{F}_X}}\downarrow & & {\scriptstyle l^2_{\mathcal{G}_X}}\downarrow & & {\scriptstyle l^2_{\mathcal{H}_X}}\downarrow & & \\
 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & ,
\end{array}$$

jossa kaikki rivit ovat eksakteja. Olkoon $n \geq 1$ ja muodostetaan edeltävän kaavion perusteella isomorfismi

$$\ker(l^n_{\mathcal{F}_X}) / \operatorname{im}(l^{n-1}_{\mathcal{F}_X}) = H^n(X, \mathcal{F}) \to H^n(X, \mathcal{G}) = \ker(l^n_{\mathcal{G}_X}) / \operatorname{im}(l^{n-1}_{\mathcal{G}_X}).$$

Olkoon $s \in \ker(l^n_{\mathcal{F}_X})$. Täten, koska edeltävä kaavio kommutoi, niin

$$l^n_{\mathcal{G}_X}(\varphi^n_X(s)) = \varphi^{n+1}_X(l^n_{\mathcal{F}_X}(s)) = \varphi^{n+1}_X(0) = 0,$$

joten $\varphi^n_X(s) \in \ker(l^n_{\mathcal{G}_X})$. Osoitetaan seuraavaksi, että

$$\varphi^n_X(\mathrm{im}(l^{n-1}_{\mathcal{F}_X})) \subseteq \mathrm{im}(l^{n-1}_{\mathcal{G}_X}).$$

Olkoon $b \in \mathrm{im}(l^{n-1}_{\mathcal{F}_X})$. Tällöin on olemassa $a \in G^{n-1}(\mathcal{F})(X)$ siten, että $l^{n-1}_{\mathcal{F}_X}(a) = b$. Täten

$$\varphi^n_X(b) = \varphi^n_X(l^{n-1}_{\mathcal{F}_X}(a)) = l^{n-1}_{\mathcal{G}_X}(\varphi^{n-1}_X(a)),$$

sillä edeltävä kaavio kommutoi. Siis $\varphi^n_X(b) \in \mathrm{im}(l^{n-1}_{\mathcal{G}_X})$, joten

$$\varphi^n_X(\mathrm{im}(l^{n-1}_{\mathcal{F}_X})) \subseteq \mathrm{im}(l^{n-1}_{\mathcal{G}_X}).$$

Voidaan siis määritellä kuvaus

$$\overline{\varphi^n_X}\colon H^n(X,\mathcal{F}) \to\ H^n(X,\mathcal{G})$$

siten, että alkiolle $[s] \in H^n(X,\mathcal{F})$, pätee

$$\overline{\varphi^n_X}([s]_{\mathrm{im}(l^{n-1}_{\mathcal{F}_X})}) = [\varphi^n_X(s)]_{\mathrm{im}(l^{n-1}_{\mathcal{G}_X})}.$$

Vastaavasti voidaan määritellä kuvaus

$$\overline{\psi^n_X}\colon H^n(X,\mathcal{G}) \to\ H^n(X,\mathcal{H})$$

siten, että alkiolle $[s] \in H^n(X,\mathcal{G})$, pätee

$$\overline{\psi^n_X}([s]_{\mathrm{im}(l^{n-1}_{\mathcal{G}_X})}) = [\psi^n_X(s)]_{\mathrm{im}(l^{n-1}_{\mathcal{H}_X})}.$$

Osoitetaan sitten, että

$$\mathrm{im}(\overline{\varphi^n_X}) = \ker(\overline{\psi^n_X}).$$

Edeltävän kaavion rivit ovat eksakteja, joten $\psi^n_X \circ \varphi^n_X = 0$, mistä seuraa

$$\overline{\psi^n_X} \circ \overline{\varphi^n_X}([s]) = \overline{\psi^n_X}([\varphi^n_X(s)]) = [\psi^n_X(\varphi^n_X(s))] = 0$$

kaikilla $[s] \in H^n(X,\mathcal{F})$, joten $\overline{\psi^n_X} \circ \overline{\varphi^n_X} = 0$. Olkoon $t \in \mathrm{im}(\overline{\varphi^n_X})$, jolloin on olemassa $s \in H^n(X,\mathcal{F})$ siten, että $\overline{\varphi^n_X}(s) = t$ ja edeltävän perusteella

$$\overline{\psi^n_X}(t) = \overline{\psi^n_X}(\overline{\varphi^n_X}(s)) = 0,$$

joten $t \in \ker(\overline{\psi^n_X})$. Olkoon sitten $[s] \in \ker(\overline{\psi^n_X})$. Toisin sanoen

$$\overline{\psi^n_X}([s]) = [\psi^n_X(s)] = 0,$$

jolloin $\psi^n_X(s) \in \mathrm{im}(l^{n-1}_{\mathcal{H}_X})$. On siis olemassa $t \in G^{n-1}(\mathcal{H})(X)$ siten, että

$$l^{n-1}_{\mathcal{H}_X}(t) = \psi^n_X(s).$$

Nyt edeltävän kaavion rivit ovat eksakteja, joten ψ^{n-1}_X on surjektio, jolloin on olemassa $r \in G^{n-1}(\mathcal{G})(X)$ siten, että $t = \psi^{n-1}_X(r)$. Merkitään

$$s' = s - l^{n-1}_{\mathcal{G}_X}(r).$$

Nyt lauseen 5.6 mukaan $l^n_{\mathcal{G}_X} \circ l^{n-1}_{\mathcal{G}_X} = 0$ ja lisäksi $s \in \ker l^n_{\mathcal{G}_X}$, joten

$$l^n_{\mathcal{G}_X}(s') = l^n_{\mathcal{G}_X}(s - l^{n-1}_{\mathcal{G}_X}(r)) = l^n_{\mathcal{G}_X}(s) - l^n_{\mathcal{G}_X}(l^{n-1}_{\mathcal{G}_X}(r)) = 0.$$

Siis $s' \in \ker l^n_{\mathcal{G}_X}$ ja sektion s' määritelmän perusteella $[s] = [s']$. Toisaalta, koska edeltävä kaavio kommutoi, niin

$$\begin{aligned}
\psi^n_X(s') &= \psi^n_X(s - l^{n-1}_{\mathcal{G}_X}(r)) \\
&= \psi^n_X(s) - \psi^n_X(l^{n-1}_{\mathcal{G}_X}(r)) \\
&= \psi^n_X(s) - l^{n-1}_{\mathcal{H}_X}(\psi^{n-1}_X(r)) \\
&= \psi^n_X(s) - l^{n-1}_{\mathcal{H}_X}(t) \\
&= \psi^n_X(s) - \psi^n_X(s) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

joten $s' \in \ker(\psi^n_X)$, joten koska $\ker(\psi^n_X) = \operatorname{im}(\varphi^n_X)$, niin on olemassa $f \in G^n(\mathcal{F})(X)$ siten, että $\varphi^n_X(f) = s'$. Lisäksi, koska φ^{n+1}_X on injektio ja

$$\varphi^{n+1}_X(l^n_{\mathcal{F}_X}(f)) = l^n_{\mathcal{G}_X}(\varphi^n_X(f)) = l^n_{\mathcal{G}_X}(s') = 0,$$

niin $l^n_{\mathcal{F}_X}(f) = 0$, joten $f \in \ker(l^n_{\mathcal{F}_X})$. Täten

$$\overline{\varphi^n_X}([f]) = [\varphi^n_X(f)] = [s'] = [s],$$

joten $[s] \in \operatorname{im}(\overline{\varphi^n_X})$. Osoitetaan seuraavaksi, että kaikilla $n \geq 0$ on olemassa homomorfismi

$$\delta^n_X : H^n(X, \mathcal{H}) \to H^{n+1}(X, \mathcal{F}).$$

Olkoon $t \in \ker(l^n_{\mathcal{H}_X})$. Nyt edeltävän kaavion rivit ovat eksakteja, joten ψ^n_X on surjektio, ja koska $t \in G^n(\mathcal{H})(X)$, niin on olemassa $s \in G^n(\mathcal{G})(X)$ siten, että $\psi^n_X(s) = t$. Lisäksi, koska edeltävä kaavio kommutoi, niin

$$\psi^{n+1}_X(l^n_{\mathcal{G}_X}(s)) = l^n_{\mathcal{H}_X}(\psi^n_X(s)) = l^n_{\mathcal{H}_X}(t) = 0,$$

joten $l^n_{\mathcal{G}_X}(s) \in \ker(\psi^{n+1}_X)$. On siis olemassa $r \in G^{n+1}(\mathcal{F})(X)$ siten, että $\varphi^{n+1}_X(r) = l^n_{\mathcal{G}_X}(s)$. Huomataan, että r on yksikäsitteinen, sillä φ^{n+1}_X on injektio. Lauseen 5.6 mukaan $l^{n+1}_{\mathcal{G}_X} \circ l^n_{\mathcal{G}_X} = 0$, joten

$$\varphi^{n+2}_X(l^{n+1}_{\mathcal{F}_X}(r)) = l^{n+1}_{\mathcal{G}_X}(\varphi^{n+1}(r)) = l^{n+1}_{\mathcal{G}_X}(l^n_{\mathcal{G}_X}(s)) = 0.$$

Täten, koska φ^{n+2}_X on injektio, niin $l^{n+1}_{\mathcal{F}_X}(r) = 0$, joten $r \in \ker(l^{n+1}_{\mathcal{F}_X})$. Huomataan kuitenkin, että aiemmin löydetty sektio s ei ole välttämättä yksikäsitteinen, joten oletetaan, että on olemassa $s' \in G^n(\mathcal{G})(X)$ siten, että $\psi^n_X(s) = t$. Täten vastaavasti kuin edellä löydetään yksikäsitteinen $r' \in \ker(l^{n+1}_{\mathcal{F}_X})$ siten, että $\varphi^{n+1}_X(r') = l^n_{\mathcal{G}_X}(s')$. Nyt

$$\psi^n_X(s' - s) = \psi^n_X(s') - \psi^n_X(s) = t - t = 0,$$

joten $s' - s \in \ker(\psi_X^n)$, ja koska edellä annetun kaavion rivit ovat eksakteja, niin $s' - s \in \mathrm{im}(\varphi_X^n)$, joten on olemassa $a \in G^n(\mathcal{F})(X)$ siten, että

$$s' - s = \varphi_X^n(a),$$

joten voidaan kirjoittaa $s' = s + \varphi_X^n(a)$. Täten

$$\begin{aligned}\varphi_X^{n+1}(r') &= l_{\mathcal{G}_X}^n(s') \\ &= l_{\mathcal{G}_X}^n(s + \varphi_X^n(a)) \\ &= l_{\mathcal{G}_X}^n(s) + l_{\mathcal{G}_X}^n(\varphi_X^n(a)) \\ &= \varphi_X^{n+1}(r) + \varphi_X^{n+1}(l_{\mathcal{F}_X}^n(a)) \\ &= \varphi_X^{n+1}(r + l_{\mathcal{F}_X}^n(a)),\end{aligned}$$

joten $r' = r + l_{\mathcal{F}_X}^n(a)$, sillä φ_X^{n+1} on injektio. Toisin sanoen

$$[r']_{\mathrm{im}(l_{\mathcal{F}_X}^n)} = [r]_{\mathrm{im}(l_{\mathcal{F}_X}^n)}.$$

Tutkitaan sitten sektion t määräämää pistettä $[t] \in H^n(X, \mathcal{H})$. Olkoon $[t''] \in H^n(X, \mathcal{H})$ siten, että $[t''] = [t]$. Tällöin pätee

$$t'' = t + l_{\mathcal{H}_X}^{n-1}(c),$$

missä $c \in G^{n-1}(\mathcal{H})(X)$. Tällöin, vastaavasti kuin edellä, on olemassa $s'' \in G^n(\mathcal{G})(X)$ siten, että $\psi_X^n(s'') = t''$ ja yksikäsitteinen $r'' \in \ker(l_{\mathcal{F}_X}^{n+1})$ siten, että $\varphi_X^{n+1}(r'') = l_{\mathcal{G}_X}^n(s'')$. Jos $n = 0$, niin $l_X^{-1}(b) = 0$, joten $t'' = t$ ja siis $[r''] = [r]$. Voidaan siis olettaa, että $n \geq 1$. Nyt, koska ψ_X^{n-1} on surjektio, niin on olemassa $c \in G^{n-1}(\mathcal{G})(X)$ siten, että $\psi_X^{n-1}(c) = b$. Täten, koska edeltävä kaavio kommutoi, saadaan

$$\psi_X^n(l_{\mathcal{G}_X}^{n-1}(c)) = l_{\mathcal{H}_X}^{n-1}(\psi_X^{n-1}(c)) = l_{\mathcal{H}_X}^{n-1}(b).$$

Tarkastellaan sitten sektiota $s'' - s - l_{\mathcal{G}_X}^{n-1}(c)$. Tälle pätee

$$\begin{aligned}\psi_X^n(s'' - s - l_{\mathcal{G}_X}^{n-1}(c)) &= \psi_X^n(s'') - \psi_X^n(s) - \psi_X^n(l_{\mathcal{G}_X}^{n-1}(c)) \\ &= t'' - t - l_{\mathcal{H}_X}^{n-1}(b) \\ &= t + l_{\mathcal{H}_X}^{n-1}(b) - t - l_{\mathcal{H}_X}^{n-1}(b) \\ &= 0,\end{aligned}$$

joten $s'' - s - l_{\mathcal{G}_X}^{n-1}(c) \in \ker(\psi_X^n)$, jolloin on olemassa $d \in G^n(\mathcal{F})(X)$ siten, että

$$\varphi_X^n(d) = s'' - s - l_{\mathcal{G}_X}^{n-1}(c) \in \ker(\psi_X^n),$$

joten voidaan kirjoittaa

$$s'' = s + l_{\mathcal{G}_X}^{n-1}(c) + \varphi_X^n(d).$$

Nyt edeltävän tarkastelun perusteella

$$\begin{aligned}
\varphi_X^{n+1}(r'') &= l_{\mathcal{G}_X}^n(s'') \\
&= l_{\mathcal{G}_X}^n(s + l_{\mathcal{G}_X}^{n-1}(c) + \varphi_X^n(d)) \\
&= l_{\mathcal{G}_X}^n(s) + l_{\mathcal{G}_X}^n(l_{\mathcal{G}_X}^{n-1}(c)) + l_{\mathcal{G}_X}^n(\varphi_X^n(d)) \\
&= \varphi_X^{n+1}(r) + 0 + \varphi_X^{n+1}(l_{\mathcal{F}_X}^n(d)) \\
&= \varphi_X^{n+1}(r + l_{\mathcal{F}_X}^n(d)),
\end{aligned}$$

ja koska φ_X^{n+1} on injektio, niin $r'' = r + l_{\mathcal{F}_X}^n(d)$, joten

$$[r'']_{\mathrm{im}(l_{\mathcal{F}_X}^n)} = [r]_{\mathrm{im}(l_{\mathcal{F}_X}^n)}.$$

Tämän tarkastelun perusteella voidaan siis määritellä homomorfismi

$$\delta_X^n \colon H^n(X, \mathcal{H}) \to H^{n+1}(X, \mathcal{F})$$

siten, että $\delta_X^n([t]) = [r]$. Täten on olemassa jono

$$H^n(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\overline{\psi_X^n}} H^n(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta_X^n} H^{n+1}(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\overline{\varphi_X^n}} H^{n+1}(X, \mathcal{G}).$$

Todistetaan vielä lopuksi, että kyseinen jono on eksakti. Olkoon $[t] \in \ker(\delta_X^n)$. Edellisen tarkastelun ja oletuksen perusteella

$$\delta_X^n([t]) = [r] = 0,$$

missä $r \in \ker(l_{\mathcal{F}_X}^{n+1})$. Tällöin $r \in \mathrm{im}(l_{\mathcal{F}_X}^n)$, joten on olemassa $a \in G^n(\mathcal{F})(X)$ siten, että $l_{\mathcal{F}_X}^n(a) = r$. Kuvauksen δ_X^n määritelmän perusteella on olemassa $s \in G^n(\mathcal{G})(X)$ siten, että $l_{\mathcal{G}_X}^n(s) = \varphi_X^{n+1}(r)$ ja $\psi_X^n(s) = t$, joten

$$l_{\mathcal{G}_X}^n(s) = \varphi_X^{n+1}(r) = \varphi_X^{n+1}(l_{\mathcal{F}_X}^n(a)) = l_{\mathcal{G}_X}^n(\varphi_X^n(a)),$$

mistä saadaan $l_{\mathcal{G}_X}^n(s - \varphi_X^n(a)) = 0$, joten $s - \varphi_X^n(a) \in \ker(l_{\mathcal{G}_X}^n)$. Nyt, koska edeltävän kaavion kaikki rivit ovat eksakteja, niin

$$\begin{aligned}
\overline{\psi_x^n}([s - \varphi_X^n]_{\mathrm{im}(l_{\mathcal{G}_X}^n)}) &= [\psi_X^n(s - \varphi_X^n(a))]_{\mathrm{im}(l_{\mathcal{H}_X}^n)} \\
&= [\psi_X^n(s) - \psi_X^n(\varphi_X^n(a))]_{\mathrm{im}(l_{\mathcal{H}_X}^n)} \\
&= [t]_{\mathrm{im}(l_{\mathcal{H}_X}^n)},
\end{aligned}$$

joten $[t] \in \mathrm{im}(\overline{\psi_X^n})$. Olkoon sitten $[t] \in \mathrm{im}(\overline{\psi_X^n})$, jolloin on olemassa $s \in \ker(l_{\mathcal{G}_X}^n)$ siten, että $\psi_X^n(s) = t$. Edeltävän tarkastelun perusteella on lisäksi olemassa $r \in \ker(l_{\mathcal{F}_X}^{n+1})$ siten, että $\varphi_X^{n+1}(r) = l_{\mathcal{G}_X}^n(s) = 0$, jolloin $r = 0$, sillä φ_X^{n+1} on injektio. Siis

$$\delta_X^n([t]_{\mathrm{im}(l_{\mathcal{H}_X}^n)}) = [r]_{\mathrm{im}(l_{\mathcal{F}_X}^{n+1})} = [0]_{\mathrm{im}(l_{\mathcal{F}_X}^{n+1})} = 0_{H^{n+1}(X, \mathcal{F})}.$$

Täten $[t] \in \ker(\delta_X^n)$, joten on osoitettu, että

$$\operatorname{im}(\overline{\psi_X^n}) = \ker(\delta_X^n).$$

Olkoon sitten $[r] \in \ker(\overline{\varphi_X^{n+1}})$. Toisin sanoen

$$\overline{\varphi_X^{n+1}}([r]) = [\varphi_X^{n+1}(r)] = 0,$$

joten on olemassa $s \in G^n(\mathcal{G})(X)$ siten, että $\varphi_X^{n+1}(r) = l_{\mathcal{G}_X}^n(s)$. Nyt koska edeltävä kaavio kommutoi ja sen rivit ovat eksakteja, niin

$$l_{\mathcal{H}_X}^n(\psi_X^n(s)) = \psi^{n+1}(l_{\mathcal{G}_X}^n(s)) = \psi_X^{n+1}(\varphi_X^{n+1}(s)) = 0,$$

joten $\psi_X^n(s) \in \ker(l_{\mathcal{H}_X}^n)$, jolloin kuvauksen δ_X^n määritelmän perusteella saadaan $\delta_X^n([\psi_X^n(s)]) = [r]$, joten $[r] \in \operatorname{im}(\delta_X^n)$. Olkoon sitten $[r] \in \operatorname{im}(\delta_X^n)$, jolloin on olemassa $[t] \in H^n(X, \mathcal{H})$ siten, että $\delta_X^n([t]) = [r]$. Nyt siis sektiolle $t \in \ker(l_{\mathcal{H}_X}^n)$ on olemassa sektio $s \in G^n(\mathcal{G})(X)$ siten, että $\varphi^{n+1}(r) = l_{\mathcal{G}_X}^n(s)$. Täten

$$\overline{\varphi_X^{n+1}}([r]_{\operatorname{im}(l_{\mathcal{F}_X}^{n+1})}) = [\varphi^{n+1}(r)]_{\operatorname{im}(l_{\mathcal{G}_X}^{n+1})} = [l_{\mathcal{G}_X}^n(s)]_{\operatorname{im}(l_{\mathcal{G}_X}^{n+1})} = 0_{H^{n+1}(X,\mathcal{G})},$$

joten $[r] \in \ker(\overline{\varphi_X^{n+1}})$. Siis

$$\operatorname{im}(\delta_X^n) = \ker(\overline{\varphi_X^{n+1}}).$$

□

Määritelmä 5.5 (ks. [3, s. 13])**.** Edellä määritelty kohomologiaryhmistä muodostuva jono tunnetaan *pitkänä eksaktina kohomologiaryhmien jonona.*

5.4 Kohomologiaryhmien isomorfisuus

Edellisessä lauseessa kohomologiaryhmien jono muodostettiin käyttämällä kyseisten lyhteiden Godementin resoluutioita. Monesti kuitenkin kohomologiaryhmien jonon muodostaminen on mielekkäämpää käyttämällä joitain muita lyhteiden velttoja resoluutioita. Huomataan kuitenkin, että kaikki lyhteen veltot resoluutiot muodostavat keskenään isomorfiset kohomologiaryhmien jonot, ja todistetaan tämä tulos seuraavaksi.

Lause 5.9. *Olkoon $\mathcal{F}$ topologisen avaruuden X lyhde. Kohomologiaryhmä $H^n(X, \mathcal{F})$ ei riipu lyhteen $\mathcal{F}$ velton resoluution valinnasta.*

Todistus (vrt. [6, s. 120–124]). Olkoot $(S^\bullet, d)$ lyhteen $\mathcal{F}$ veltto resoluutio, missä

$$\mathcal{S}^\bullet \colon \mathcal{S}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{S}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{S}^2 \xrightarrow{d^2} \dots,$$

ja $(G^\bullet, l)$ lyhteen $\mathcal{F}$ Godementin resoluutio. Osoitetaan, että velttojen resoluutioiden $(S^\bullet, d)$ ja $(G^\bullet, l)$ määräämät kohomologiaryhmät ovat keskenään isomorfiset. Lauseen 4.5 perusteella saadaan kommutoiva kaavio

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}^0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}^1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}^2 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & G^0(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & G^0(\mathcal{S}^0) \arrow[r] \arrow[d] & G^0(\mathcal{S}^1) \arrow[r] \arrow[d] & G^0(\mathcal{S}^2) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & G^1(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & G^1(\mathcal{S}^0) \arrow[r] \arrow[d] & G^1(\mathcal{S}^1) \arrow[r] \arrow[d] & G^1(\mathcal{S}^2) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & G^2(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & G^2(\mathcal{S}^0) \arrow[r] \arrow[d] & G^2(\mathcal{S}^1) \arrow[r] \arrow[d] & G^2(\mathcal{S}^2) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & ,
\end{tikzcd}$$

jonka kaikki rivit ja sarakkeet ovat eksakteja. Täten lauseen 5.3 nojalla saadaan Abelin ryhmistä koostuva kommutoiva kaavio

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}^0(X) \arrow[r, "d_X^0"] \arrow[d, "e_X^0"'] & \mathcal{S}^1(X) \arrow[r, "d_X^1"] \arrow[d, "e_X^1"'] & \dots \\
0 \arrow[r] & G^0(\mathcal{F})(X) \arrow[r, "\epsilon_X^0"] \arrow[d, "l_X^0"'] & G^0(\mathcal{S}^0)(X) \arrow[r, "d_X^{0,0}"] \arrow[d, "l_X^{0,0}"'] & G^0(\mathcal{S}^1)(X) \arrow[r, "d_X^{0,1}"] \arrow[d, "l_X^{0,1}"'] & \dots \\
0 \arrow[r] & G^1(\mathcal{F})(X) \arrow[r, "\epsilon_X^1"] \arrow[d, "l_X^1"'] & G^1(\mathcal{S}^0)(X) \arrow[r, "d_X^{1,0}"] \arrow[d, "l_X^{1,0}"'] & G^1(\mathcal{S}^1)(X) \arrow[r, "d_X^{1,1}"] \arrow[d, "l_X^{1,1}"'] & \dots \\
0 \arrow[r] & G^2(\mathcal{F})(X) \arrow[r, "\epsilon_X^2"] \arrow[d, "l_X^2"'] & G^2(\mathcal{S}^0)(X) \arrow[r, "d_X^{2,0}"] \arrow[d, "l_X^{2,0}"'] & G^2(\mathcal{S}^1)(X) \arrow[r, "d_X^{2,1}"] \arrow[d, "l_X^{2,1}"'] & \dots \\
 & \dots & \dots & \dots & ,
\end{tikzcd}$$

missä ensimmäistä saraketta ja ensimmäistä riviä lukuun ottamatta kaikki sarakkeet ja rivit ovat eksakteja. Todistetaan tämän kaavion avulla, että

$$\ker(d_X^n)/\operatorname{im}(d_X^{n-1}) = \ker(l_X^n)/\operatorname{im}(l_X^{n-1})$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Todetaan ensin, että lauseen 5.7 mukaan

$$\ker(d_X^0)/\operatorname{im}(d_X^{-1}) = \mathcal{F}(X) = \ker(l_X^0)/\operatorname{im}(l_X^{-1}).$$

Osoitetaan sitten, että on olemassa isomorfismi

$$\ker(l_X^1)/\operatorname{im}(l_X^0) \to \ker(d_X^1)/\operatorname{im}(d_X^0).$$

Olkoon $s \in G^1(\mathcal{F})(X)$ siten, että $l_X^1(s) = 0$. Tällöin koska edeltävä kaavio kommutoi, niin

$$l_X^{1,0}(\epsilon_X^1(s)) = \epsilon_X^2(l_X^1(s)) = \epsilon_X^2(0) = 0,$$

joten $\epsilon_X^1(s) \in \ker(l_X^{1,0})$. Nyt koska $\ker(l_X^{1,0}) = \operatorname{im}(l_X^{0,0})$, niin on olemassa $t \in G^0(\mathcal{S}^0)(X)$ siten, että $l_X^{0,0}(t) = \epsilon_X^1(s)$. Nyt $\operatorname{im}(\epsilon_X^1) = \ker(d_X^{1,0})$, joten

$$l_X^{0,1}(d_X^{0,0}(t)) = d_X^{1,0}(l_X^{0,0}(t)) = d_X^{1,0}(\epsilon_X^1(s)) = 0.$$

Tällöin siis $d_X^{0,0}(t) \in \ker(l_X^{0,1})$, joten on olemassa $a \in \mathcal{S}^1(X)$ siten, että $e_X^1(a) = d_X^{0,0}(t)$. Tämä a on yksikäsitteinen, sillä e_X^1 on injektio. Täten, koska kaavio kommutoi ja on eksakti, niin

$$e_X^2(d_X^1(a)) = d_X^{0,1}(e_X^1(a)) = d_X^{0,1}(d_X^{0,0}(t)) = 0.$$

Nyt e_X^2 on injektio, joten $d_X^1(a) = 0$, joten $a \in \ker(d_X^1)$. On siis olemassa $a \in \ker(d_X^1)$ siten, että sektio $s \in \ker(l_X^1)$ voidaan kuvata sille. Huomataan kuitenkin, että edeltävässä todistuksessa sektio $t \in G^0(\mathcal{S}^0)(X)$ ei ole välttämättä yksikäsitteinen. Oletetaan siis, että on olemassa $t' \in G^0(\mathcal{S}^0)(X)$ siten, että $l_X^{0,0}(t') = \epsilon_X^1(s)$. Täten

$$l_X^{0,0}(t'-t) = l_X^{0,0}(t') - l_X^{0,0}(t) = \epsilon_X^1(s) - \epsilon_X^1(s) = 0,$$

joten $t'-t \in \ker(l_X^{0,0})$, ja tällöin kaavion eksaktiuden nojalla $t'-t \in \operatorname{im}(e_X^0)$. On siis olemassa $a_0 \in \mathcal{S}^0(X)$ siten, että $e_X^0(a_0) = t'-t$. Voidaan siis kirjoittaa, että $t' = t + e_X^0(a_0)$. Edeltävän kuvauksen nojalla, vastaavasti kuin edellä, on olemassa yksikäsitteinen $a' \in \ker(d_X^1)$ siten, että $e_X^1(a') = d_X^{0,0}(t')$. Kuitenkin

$$\begin{aligned}
e_X^1(a') &= d_X^{0,0}(t') \\
&= d_X^{0,0}(t + e_X^0(a_0)) \\
&= d_X^{0,0}(t) + d^{0,0}(e_X^0(a_0)) \\
&= e_X^1(a) + e^1(d_X^0(a_0)) \\
&= e_X^1(a + d_X^0(a_0)),
\end{aligned}$$

jolloin $a' = a + d_X^0(a_0)$, sillä e_X^1 on injektio. Täten jokaista sektiota $s \in \ker(l_X^1)$ kohti on olemassa yksikäsitteinen sektio $[a] \in \ker(d_X^1)/\operatorname{im}(d_X^0)$.
Olkoon sitten $[s'] = [s] \in \ker(l_X^1)/\operatorname{im}(l_X^0)$. Nyt siis $s' = s + l_X^0(t_0)$, missä $t_0 \in \mathcal{G}^0(\mathcal{F})(X)$ ja tällöin

$$\begin{aligned}
\epsilon_X^1(s') &= \epsilon_X^1(s + l_X^0(t_0)) \\
&= \epsilon_X^1(s) + \epsilon_X^1(l_X^0(t_0)) \\
&= l_X^{0,0}(t) + l_X^{0,0}(\epsilon_X^0(t_0)) \\
&= l_X^{0,0}(t + \epsilon_X^0(t_0)).
\end{aligned}$$

Lisäksi

$$d^{0,0}(t+\epsilon_X^0(t_0)) = d^{0,0}(t) + d^{0,0}(\epsilon_X^0(t_0)) = d^{0,0}(t) = e_X^1(a),$$

joten sektiota s' vastaa sama sektio $[a] \in \ker(d_X^1)/\operatorname{im}(d_X^0)$ kuin sektiota s, joten voidaan määritellä kuvaus

$$\ker(l_X^1)/\operatorname{im}(l_X^0) \to \ker(d_X^1)/\operatorname{im}(d_X^0),$$

missä sektio $[s] \in \ker(l_X^1)/\operatorname{im}(l_X^0)$ kuvataan edeltävällä tavalla löytyneelle sektiolle $[a] \in \ker(d_X^1)/\operatorname{im}(d_X^0)$. Todistetaan, että tämä kuvaus on bijektio. Olkoon $[a] \in \ker(d_X^1)/\operatorname{im}(d_X^0)$, ja nyt, koska tarkastellussa kaaviossa ensimmäistä riviä ja saraketta lukuunottamatta kaikki rivit ja sarakkeet ovat eksakteja, niin vastaavanlaisilla perusteluilla kuin edellä, kulkemalla kaaviota vastakkaiseen suuntaan, löydetään yksikäsitteinen sektio $[s] \in \ker(l_X^1)/\operatorname{im}(l_X^0)$. Toisaalta, jos $[a] = [a']$, niin niitä vastaavilla sektioilla $[s], [s'] \in \ker(l_X^1)/\operatorname{im}(l_X^0)$ pätee $[s] = [s']$. Tämä kuvaus on homomorfismi, sillä kaavion kaikki kuvaukset ovat homomorfismeja, joten näin määritelty kuvaus on isomorfismi.

Todistetaan vielä, että

$$\ker(l_X^n)/\operatorname{im}(l_X^{n-1}) = \ker(d_X^n)/\operatorname{im}(d_X^{n-1})$$

kaikilla $n \geq 2$. Olkoon $s \in G^n(\mathcal{F})(X)$ siten, että $l_X^n(s) = 0$. Nyt vastaavasti kuin edellä $\epsilon_X^n(s) \in \ker(l_X^{n,0})$, ja täten on olemassa $t_{n-1} \in G^{n-1}(\mathcal{S}^0)(X)$ siten, että $\epsilon_X^n(s) = l^{n-1,0}(t_{n-1})$. Tälle pätee

$$l_X^{n-1,1}(d_X^{n-1,0}(t_{n-1})) = d_X^{n,0}(l^{n-1,0}(t_{n-1})) = d_X^{n,0}(\epsilon_X^n(s)) = 0,$$

joten $d_X^{n-1,0}(t_{n-1}) \in \ker(l_X^{n-1,1})$. Täten on olemassa $t_{n-2} \in G^{n-2}(\mathcal{S}^1)(X)$ siten, että $d_X^{n-1,0}(t_{n-1}) = l_X^{n-2,1}(t_{n-2})$, jolle pätee

$$l_X^{n-2,2}(d_X^{n-2,1}(t_{n-2})) = d_X^{n-1,1}(l_X^{n-2,1}(t_{n-2})) = d_X^{n-1,1}(d_X^{n-1,0}(t_{n-1})) = 0,$$

joten $d_X^{n-2,1}(t_{n-2}) \in \ker(l_X^{n-2,2})$. Toistamalla tätä prosessia löydetään sektiot $t_k \in G^k(\mathcal{S}^{n-k-1})(X)$, missä $k \in \{0, \dots, n-1\}$, ja joille pätee

$$d_X^{k,n-k-1}(t_k) \in \ker(l_X^{k,n-k}).$$

Lisäksi kaikille $k \in \{0, \dots, n-2\}$ pätee

$$d_X^{k+1,n-k-2}(t_{k+1}) = l_X^{k,n-k-1}(t_k).$$

Täten koska $d_X^{0,n-1}(t_0) \in \ker(l_X^{0,n})$, niin on olemassa $a \in \mathcal{S}^n(X)$ siten, että $a \in \ker(d_X^n)$. Vastaavasti kuin edellä, sektiota t_0 vastaava sektio a on yksikäsitteinen, mutta sektiot t_k, $k \in \{0, \dots, n-1\}$ eivät ole välttämättä yksikäsitteisiä. Oletetaan siis, että on olemassa $t_0' \in G^0(\mathcal{S}^{n-1})(X)$ siten, että $l_X^{0,n-1}(t_0') = d_X^{1,n-2}(t_1)$. Nyt vastaavasti kuin edellä $t_0' - t_0 \in \ker(l_X^{0,n-1})$, joten on olemassa $a_0 \in \mathcal{S}^{n-1}(X)$ siten, että $e_X^{n-1}(a_0) = t_0' - t_0$, jolloin voidaan kirjoittaa $t_0' = t_0 + e_X^{n-1}(a_0)$. Vastaavasti kuin edellä, sektiota t_0' vastaava sektio $a' \in \ker(d_X^n)$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$a' = a + d_X^{n-1}(a_0),$$

joten

$$[a']_{\mathrm{im}(d_X^{n-1})} = [a]_{\mathrm{im}(d_X^{n-1})}.$$

Olkoon sitten $t_k' \in G^k(\mathcal{S}^{n-k-1})$, missä $k \in \{1, \dots, n-1\}$, siten, että

$$d_X^{k+1,n-k-2}(t_{k+1}) = l_X^{k,n-k-1}(t_k') = l_X^{k,n-k-1}(t_k).$$

Nyt, vastaavasti kuin edellä, $d_X^{k,n-k-1}(t_k') \in \ker(l_X^{k,n-k})$ ja $t_k' - t_k \in \ker(l_X^{k,n-k-1})$, joten on olemassa $b_k \in G^{k-1}(\mathcal{S}^{n-k-1})$ siten, että

$$t_k' - t_k = l_X^{k-1,n-k-1}(b_k).$$

Nyt edeltävän tarkastelun perusteella on olemassa $t_{k-1}' \in G^{k-1}(\mathcal{S}^{n-k})(X)$ siten, että

$$d_X^{k,n-k-1}(t_k') = l_X^{k-1,n-k}(t_{k-1}').$$

Tarkastellaan sitten sektiota $t_{k-1}' - d_X^{k-1,n-k-1}(b_k)$. Edeltävä kaavio kommutoi, joten tälle sektiolle pätee

$$\begin{aligned}
l_X^{k-1,n-k}\left(t_{k-1}' - d_X^{k-1,n-k-1}(b_k)\right) &= l_X^{k-1,n-k}(t_{k-1}') - l_X^{k-1,n-k}(d_X^{k-1,n-k-1}(b_k)) \\
&= d_X^{k,n-k-1}(t_k') - d_X^{k,n-k-1}(l_X^{k-1,n-k-1}(b_k)) \\
&= d_X^{k,n-k-1}(t_k') - d_X^{k,n-k-1}(t_k' - t_k) \\
&= d_X^{k,n-k-1}(t_k),
\end{aligned}$$

jolloin $t_{k-1}' - d_X^{k-1,n-k-1}(b_k) - t_{k-1} \in \ker(l_X^{k-1,n-k})$. On siis olemassa $b_{k-1} \in G^{k-2}(\mathcal{S}^{n-k})(X)$ siten, että

$$t_{k-1}' - d_X^{k-1,n-k-1}(b_k) - t_{k-1} = l_X^{k-2,n-k}(b_{k-1}).$$

Huomataan lisäksi, että

$$\begin{aligned}
d_X^{k-1,n-k}\left(t_{k-1}' - d_X^{k-1,n-k-1}(b_k)\right) &= d_X^{k-1,n-k}(t_{k-1}') - d^{k-1,n-k}(d_X^{k-1,n-k-1}(b_k)) \\
&= d_X^{k-1,n-k}(t_{k-1}') \\
&= l_X^{k-2,n-k+1}(t_{k-2}'),
\end{aligned}$$

missä $t_{k-2}' \in G^{k-2}(\mathcal{S}^{n-k+1})(X)$. Täten saadaan

$$\begin{aligned}
&l_X^{k-2,n-k+1}\left(t_{k-2}' - d_X^{k-2,n-k}(b_{k-1})\right) \\
&= l_X^{k-2,n-k+1}(t_{k-2}') - l_X^{k-2,n-k+1}(d_X^{k-2,n-k}(b_{k-1})) \\
&= d_X^{k-1,n-k}\left(t_{k-1}' - d_X^{k-1,n-k-1}(b_k)\right) - d_X^{k-1,n-k}\left(l^{k-2,n-k}(b_{k-1})\right) \\
&= d_X^{k-1,n-k}\left(t_{k-1}' - d_X^{k-1,n-k-1}(b_k)\right) - d_X^{k-1,n-k}\left(t_{k-1}' - d_X^{k-1,n-k-1}(b_k) - t_{k-1}\right) \\
&= d_X^{k-1,n-k}(t_{k-1}).
\end{aligned}$$

Toistamalla tätä prosessia löydetään sektiot $b_m \in G^{m-1}(S^{n-m-1})(X)$, missä $m \in \{1, \ldots, k\}$ siten, että

$$t'_{m-1} - d_X^{m-1,n-m-1}(b_m) - t_{m-1} \in \ker(l_X^{m-1,n-m}).$$

Erityisesti on siis olemassa $b_1 \in G^0(\mathcal{S}^{n-2})(X)$ siten, että

$$t'_0 - d_X^{0,n-2}(b_1) - t_0 \in \ker(l_X^{0,n-1}),$$

jolloin on olemassa $a'_0 \in \mathcal{S}^{n-1}(X)$ siten, että

$$e_X^{n-1}(a'_0) = t'_0 - d_X^{0,n-2}(b_1) - t_0,$$

joten voidaan kirjoittaa $t'_0 - d_X^{0,n-2}(b_1) = e_X^{n-1}(a'_0) + t_0$. Nyt edeltävän tarkastelun nojalla sektiota t'_0 vastaa yksikäsitteinen $a' \in \mathcal{S}^n(X)$ siten, että $e_X^n(a') = d_X^{0,n-1}(t'_0)$. Täten pätee

$$\begin{aligned}
e_X^n(a') &= d_X^{0,n-1}(t'_0) \\
&= d_X^{0,n-1}(t'_0 - d_X^{0,n-2}(b_1)) \\
&= d_X^{0,n-1}(e_X^{n-1}(a'_0) + t_0) \\
&= d_X^{0,n-1}(t_0) + d_X^{0,n-1}(e_X^{n-1}(a'_0)) \\
&= e_X^n(a) + e_X^n(d_X^{n-1}(a'_0)) \\
&= e_X^n(a + d_X^{n-1}(a'_0)),
\end{aligned}$$

joten koska e_X^n on injektio, niin $a' = a + d_X^{n-1}(a'_0)$, jolloin [a'] = [a]. Olkoon sitten $[s'] \in \ker(l_X^n)/\operatorname{im}(l_X^{n-1})$ siten, että $[s'] = [s]$. Tällöin $s' = s + l_X^{n-1}(t_0)$ jollakin $t_0 \in \mathcal{G}^{n-1}(\mathcal{F})(X)$ ja

$$\begin{aligned}
\epsilon_X^n(s') &= \epsilon_X^n(s + l_X^{n-1}(t_0)) \\
&= \epsilon_X^n(s) + \epsilon_X^n(l_X^{n-1}(t_0)) \\
&= l^{n-1,0}(t_{n-1}) + l^{n-1,0}(\epsilon_X^{n-1}(t_0)) \\
&= l^{n-1,0}(t_{n-1} + \epsilon_X^{n-1}(t_0))
\end{aligned}$$

ja tälle pätee

$$\begin{aligned}
d_X^{n-1,0}(t_{n-1} + \epsilon_X^{n-1}(t_0)) &= d_X^{n-1,0}(t_{n-1}) + d_X^{n-1,0}(\epsilon_X^{n-1}(t_0)) \\
&= d_X^{n-1,0}(t_{n-1}) \\
&= l_X^{n-2,1}(t_{n-2}).
\end{aligned}$$

Tätä sektiota vastaa edeltävän tarkastelun perusteella sama yksikäsitteinen $[a] \in \ker(d_X^n)/\operatorname{im}(d_X^{n-1})$, joten sektioita $[s]$ ja $[s']$ vastaa sama sektio $[a]$. Voidaan siis määritellä kuvaus $\ker(l_X^n)/\operatorname{im}(l_X^{n-1}) \to \ker(d_X^n)/\operatorname{im}(d_X^{n-1})$. Tämä kuvaus on bijektio, sillä kaaviota voidaan vastaavin perustein kulkea myös vastakkaiseen suuntaan, jolloin jokaista sektiota $a \in \ker(d_X^n)$ kohti on olemassa yksikäsitteinen $[s] \in \ker(l_X^n)/\operatorname{im}(l_X^{n-1})$ ja jos $[a] = [a']$ jollakin $a' \in \ker(d_X^n)$, niin niitä vastaaville sektioille $[s]$ ja $[s']$ pätee edeltävillä perusteluilla $[s] = [s']$. Tämä kuvaus on myös homomorfismi, sillä kaavion kaikki kuvaukset ovat homomorfismeja. Täten muodostettu kuvaus on isomorfismi

$$\ker(l_X^n)/\operatorname{im}(l_X^{n-1}) \to \ker(d_X^n)/\operatorname{im}(d_X^{n-1}).$$

□

Esimerkki 5.1. Olkoon $X \subseteq \mathbb{C}$ avoin ja määritellään $2\pi i\mathbb{Z}, \mathcal{O}$ ja $\mathcal{O}^*$ kuten aiemmin. Kun tarkastellaan joukolle X määriteltyjä lyhteitä $2\pi i\mathbb{Z}_X, \mathcal{O}_X$ ja $\mathcal{O}_X^*$, niin näiden eksakti jono

$$0 \longrightarrow 2\pi i\mathbb{Z}_X \xrightarrow{id} \mathcal{O}_X \xrightarrow{exp} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

määrittää lauseen 5.8 perusteella pitkän eksaktin jonon

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow\ & H^0(X, 2\pi i\mathbb{Z}_X) \longrightarrow\ H^0(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow\ H^0(X, \mathcal{O}_X^*) \\ \longrightarrow\ & H^1(X, 2\pi i\mathbb{Z}_X) \longrightarrow\ H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow\ H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \\ \longrightarrow\ & H^2(X, 2\pi i\mathbb{Z}_X) \longrightarrow\ H^2(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow\ H^2(X, \mathcal{O}_X^*) \longrightarrow \dots . \end{aligned}$$

Lauseen 5.7 mukaan $H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}(X)$ ja $H^0(X, \mathcal{O}_X^*) = \mathcal{O}^*(X)$, joten saadaan jono

$$\mathcal{O}(X) \xrightarrow{\varphi_X} \mathcal{O}^*(X) \xrightarrow{\psi_X} H^1(X, 2\pi i\mathbb{Z}_X),$$

missä $\operatorname{im}(\varphi_X) = \ker(\psi_X)$. Tämä kertoo kompleksisen logaritmin olemassaolosta. Olkoon $g \in \mathcal{O}^*(X)$. Jos on olemassa holomorfinen kuvaus $f \in \mathcal{O}(X)$ siten, että $g = \varphi_X(f)$, eli

$$g(z) = e^{f(z)},$$

kaikilla $z \in X$, niin f on kuvauksen g kompleksinen logaritmi. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\psi_X(g) = 0$. Tällöin, jos ψ_X on nollakuvaus, niin kaikilla $g \in \mathcal{O}^*(X)$ on olemassa kompleksinen logaritmi. Tämä pitää paikkansa erityisesti, jos

$$H^1(X, 2\pi i\mathbb{Z}_X) = 0.$$

Lähteet

[1] Arapura, D. (2003) *Complex Algebraic Varieties and their Cohomology.* www.math.purdue.edu/ dvb/preprints/sheaves.pdf. Haettu 20.8.2018.

[2] Godement, R. (1964) *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux.* Hermann, Paris.

[3] Greuel, G.-M., Lossen, C., Shustin, E. (2006) *Introduction to Singularities and Deformations.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest.

[4] Hartshorne, R. (2006) *Algebraic Geometry.* Springer, New York.

[5] Tennison, B. R. (1975) *Sheaf Theory.* Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, Melbourne.

[6] Ueno, K. (2001) *Algebraic Geometry 2, Sheaves and Cohomology.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.